page de titre provisoire

ÉLÉMENTS EN BÉTON ARMÉ SOUMIS À UNE COMBINAISON DE FLEXION, EFFORT TRANCHANT ET FORCES DE DÉVIATION

Thèse N° 5574

Stefano Campana

Directeur de thèse : Prof. Dr Aurelio Muttoni

Co-directeur de thèse : Dr Miguel Fernández Ruiz

École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL)

Faculté de l'Environnement Naturel, Architectural et Construit (ENAC)

Laboratoire de construction en béton (IBETON)

Préface

Les structures en béton présentent souvent des régions où la géométrie varie de façon concentrée (donnant lieu à des régions nodales) ou distribuée (donnant lieu à des éléments courbes). Dans ces éléments, la résistance est souvent contrôlée par le détail d'armature, pour lequel l'ingénieur doit appliquer des modèles de dimensionnement adaptés afin de considérer la transmission des forces internes et de gérer de potentielles poussées au vide.

Dans cette thèse, différentes problématiques associées à ces éléments sont traitées, notamment les pièces courbes sans armature transversale et les angles de cadre. Les éléments courbes sont un thème de grande importance pratique, notamment par leur application aux tranchées couvertes et autres structures voûtées. Ce thème avait déjà été étudié dans le Laboratoire de Construction en Béton pour ce qui concerne les poussées au vide d'éléments courbes soumis à des moments de flexion (thèse de doctorat de M. S. Plumey). Dans la thèse de M. Campana, le thème est approfondi, avec l'étude d'éléments courbes soumis à des moments de flexion et à des efforts tranchants. Il est à noter que le comportement des éléments courbes sous de telles sollicitations n'a presque pas été traité dans la littérature scientifique (malgré sa potentiellement large répercussion pratique), en sorte que cette étude constitue une amélioration significative de l'état actuel des connaissances. Cette étude montre que l'influence de la courbure des pièces est un paramètre important influençant de façon positive ou négative la résistance de l'élément (selon les forces de déviation agissantes). Une méthode de dimensionnement fondée sur la théorie de la fissure critique, base de l'actuelle norme Suisse pour la construction en béton, est présentée.

En ce qui concerne les angles de cadre, la thèse de M. Campana explore l'efficacité de certaines dispositions d'armature (classiques et innovantes) et la quantité minimale d'armature transversale à disposer afin d'assurer un comportement présentant une résistance et une capacité de déformation satisfaisantes. L'étude montre des résultats prometteurs pour certaines dispositions développées spécifiquement pour cette recherche et établit des méthodes de dimensionnement simples basés sur des méthodes d'équilibre comme les champs de contraintes et les modèles bielles-et-tirants.

L'étude de M. Campana contribue ainsi à améliorer l'état des connaissances actuel dans une série d'aspects fondamentaux pour les structures en béton armé et prépare les bases pour de futures recherches dans ces domaines.

Le directeur et le co-directeur de thèse remercient le Service des Routes de l'Etat du Valais pour son soutien qui a rendu possible cette recherche.

Ecublens, novembre 2012

Prof. Dr Aurelio Muttoni
Dr Miguel Fernández Ruiz

Remerciements

Cette thèse n'aurait pu aboutir eu n'aurait sans doute pas été la même sans les nombreuses contributions apportées tout au long de ces quatre années. Je tiens donc particulièrement à remercier :

Le professeur Aurelio Muttoni, mon directeur de thèse, pour m'avoir offert la possibilité d'effectuer ce travail de recherche et pour les conseils qu'il a su me donner, lesquels ont sans aucun doute laissés une empreinte importante à ce travail.

Le Dr Miguel Fernández Ruiz, mon co-directeur de thèse, pour le suivi constant qu'il a apporté à mon travail pendant ces années de recherche. Ta disponibilité et ton engagement pendant les nombreuses heures d'échange et de discussions autour des thèmes faisant le sujet de cette thèse ont contribués d'une façon déterminante à sa qualité.

Le professeur de structures en béton armé Joost Walraven de la Delft University of Technology, qui m'a accueilli dans son laboratoire pendant une période de quatre mois. Je garde un souvenir positif de cette expérience et des relations professionnelles et personnelles que j'ai pu établir avec toi ainsi que les autres personnes de ton équipe.

Mon jury de thèse, composé par le professeur Alain Nussbaumer, président du jury, le professeur Eugen Brühwiler, le professeur Antonio Ricardo Marí Bernat, le professeur Juan Sagaseta Albajar ainsi que mes directeurs de thèse. Vos intérêts respectifs au sujet de ma thèse m'ont donné énormément de fierté et de satisfaction.

Tout le personnel du groupe d'ingénierie des structures, pour la précieuse contribution à mon travail expérimental, et en particulier Gilles Guignet, pour son soutien constant et nécessaire dans le cadre des nombreux essais effectués. Ton engagement a été total et les résultats obtenus n'aurait pas été les mêmes sans ton support. Merci également à Daniele, Giotto, Eric, Marie et Rita pour votre précieux aide au laboratoire en tant qu'assistants-étudiants.

Andrea Anastasi et Giotto Messi, qui ont participé activement, dans le cadre de leurs travaux de Master, à deux des campagnes expérimentales faisant partie de ma thèse. Votre sérieux, votre engagement ainsi que vos capacités nous ont permis un échange fructueux et tout autant nécessaire pour le développement de cette recherche, pour lequel vous recevez toute ma reconnaissance.

Diego Carnero et Lionel Chevalley, deux récents diplômés que j'ai eu le plaisir d'assister. J'ai appris beaucoup de choses lors du suivi de vos travaux de Master. Merci également à tous les autres étudiants qui j'ai pu côtoyer dans le cadre des projets de semestre et des autres cours. Vos interrogations m'ont permis d'enrichir mes connaissances théoriques. Le fait que mon engagement était apprécié me rend très fier et traduit à mon sens la qualité des échanges que l'on a pu avoir pendant ces années.

Fabio Brantschen, pour son travail de relecture et pour ses remarques pertinentes. J'ai profondément apprécié le sérieux que tu a accordé à ce travail.

Tous mes actuels et anciens collègues. En particulier, merci à Damien, Dario, Fabio, Francisco, Luca, Marie-Rose, Michael, Neven, Roberto et Thibault pour avoir permis des échanges dont je garde un souvenir très positif. Vous m'avez donné la possibilité et l'envie d'aller au-delà de la relation professionnelle, en devenant des amis appréciés.

Tous mes amis. Grâce aux moments de détente que nous avons partagé, vous avez rendu cette période inoubliable d'un point de vue personnel.

Mais les plus grands remerciements vont avant tout à mes parents, à mes soeurs et à Daniela. Votre soutien inconditionné a été mon moteur pendant toutes ces années d'études. Il aurait été impossible de vous en demander plus. Je vous dédie donc cette thèse de tout mon coeur.

Stefano

Résumé

Les structures en béton armé peuvent être concernées par des zones de géométrie particulière dues à des changements de la direction de leur ligne moyenne. Ces changements peuvent être abrupts, comme par exemple dans le cas des angles de cadre, ou progressifs, comme par exemple dans les éléments courbes. Dans ces zones particulières, les efforts tranchants et les efforts normaux agissant nécessitent d'être déviés. De plus, la géométrie de ces zones soumises aux efforts de flexion peut générer des forces de déviation qui doivent être prises en compte dans leur dimensionnement. Pour ces raisons, ces zones sont fréquemment caractérisées par le développement de ruptures prématurées, qui peuvent influencer de manière sensible le comportement global des structures. Dans le cas des éléments courbes, des ruptures d'effort tranchant ou par éclatement du béton d'enrobage peuvent être observées. Dans le cas des angles de cadre, la nécessité de dévier les forces internes peut également conduire à des ruptures prématurées. Des détails d'armature adaptés permettent toutefois des comportements satisfaisants en termes de résistance et de capacité de déformation.

Ce travail de recherche a permis d'investiguer le comportement d'éléments courbes soumis à des sollicitations d'effort tranchant ainsi que celui d'angles de cadre soumis à des sollicitations d'ouverture. Les paramètres principaux influençant la réponse de ces éléments ont été identifiés, permettant le développement de méthodes pour leur vérification ainsi que pour leur dimensionnement.

Le travail de recherche a donc débuté par l'étude des modes de rupture qui s'observent dans les éléments droits (éléments sans changement de direction de la ligne moyenne) en fonction de leur élancement, défini par leur géométrie, mais qui peut également être influencé par la présence d'efforts normaux (introduits par exemple par la présence d'une précontrainte). Cette étude initiale a été complétée par une première campagne expérimentale qui a permis d'analyser, sur la base de la cinématique des fissures mesurée de façon raffinée, l'importance relative des différents modes de transmission qui peuvent contribuer au transfert de l'effort tranchant aux appuis.

Une deuxième campagne expérimentale a permis de saisir l'effet de la courbure des éléments (introduisant des forces de déviation réparties) sur leur résistance à l'effort tranchant. Il a été mis en avant que les forces de déviation ont un effet positif ou négatif selon le type de courbure des éléments (convexe ou concave). Leur effet a par la suite été considéré pour l'établissement d'un modèle de calcul basé sur les principes de la théorie de la fissure critique, qui s'est montrée pertinente pour l'étude de ces éléments.

Une troisième campagne expérimentale a enfin permis d'identifier des détails d'armature performants pour les angles de cadre obtus soumis à des sollicitations d'ouverture, pour lesquels une sensibilité conséquente aux ruptures prématurées a été mise en évidence par les recherches existantes dans la littérature. Ceci passe par la mise en place d'une

armature transversale dans la zone nodale, pour laquelle il a été démontré que le dimensionnement peut se faire en se basant sur des modèles bielles-et-tirants ou sur la méthode des champs de contraintes continus. Des indications pour le dimensionnement de cette armature transversale ont également été établies.

Mots-clefs : béton armé, éléments courbes, angles de cadre, efforts tranchants, efforts normaux, forces de déviation, modes de transmission de l'effort tranchant, armature transversale, théorie de la fissure critique, champs de contraintes, modèles bielles-et-tirants.

Riassunto

Nella progettazione e nell'analisi di costruzioni in calcestruzzo armato si è spesso confrontati con elementi che presentano delle geometrie particolari, dovute ad esempio a dei cambi di direzione dell'asse della struttura. Questi cambi di direzione possono prodursi in modo brusco, come succede negli angoli di telaio, od in modo progressivo, come succede negli elementi curvi. Per il dimensionamento di questi elementi, occorre quindi considerare la deviazione degli sforzi interni, come pure la presenza di eventuali forze di deviazione generate dalla loro particolare geometria.

Tali elementi possono essere soggetti a delle rotture premature, che influenzano poi sensibilmente il comportamento globale della struttura. Gli elementi curvi sono particolarmente sensibili alle rotture a taglio ed alle rotture dovute all'espulsione del copriferro, le quali si manifestano in modo particolarmente fragile. Nel caso degli angoli di telaio sottoposti a delle sollecitazioni di apertura, la necessità di deviare gli sforzi interni può ugualmente condurre a delle rotture premature. L'utilizzo di dettagli d'armatura specificamente concepiti può tuttavia assicurare dei comportamenti adeguati, sia in termini di resistenza che di capacità di deformazione.

Questa ricerca ha permesso di identificare i parametri principali influenzanti il comportamento degli elementi curvi sollecitati a taglio e degli angoli di telaio soggetti a delle sollecitazioni di apertura. Sulla base di tali studi, sono stati sviluppati dei metodi particolari per la verifica ed il dimensionamento di questi elementi.

Per preparare al meglio lo studio degli elementi curvi, la ricerca è iniziata con l'analisi delle caratteristiche delle rotture a taglio che si verificano negli elementi rettilinei (elementi senza cambi di direzione dell'asse della struttura), in funzione della loro snellezza. Quest'ultima è definita dalla geometria degli elementi, ma può ugualmente essere influenzata dall'azione di uno sforzo normale, dovuto per esempio alla presenza della precompressione. Quest'analisi preliminare è stata completata da una campagna di prove di laboratorio, la quale ha permesso di quantificare l'importanza relativa di ogni modo di trasmissione dello sforzo di taglio nella resistenza degli elementi. Il lavoro di quantificazione è stato effettuato basandosi interamente sulla cinematica delle fessure, la quale è stata misurata in modo accurato nel corso delle prove di laboratorio.

Una seconda campagna di prove di laboratorio ha poi permesso di investigare l'effetto della curvatura degli elementi sulla loro resistenza a taglio. Le prove effettuate hanno dimostrato che le forze di deviazione ripartite, introdotte dalla curvatura degli elementi, producono un effetto positivo o negativo in funzione del tipo di curvatura degli elementi (convessi o concavi). Tale effetto è quindi stato considerato per stabilire un modello di calcolo basato sui principi della teoria della fessura critica, la quale si è dimostrata adatta per l'analisi degli elementi curvi.

Una terza campagna di prove di laboratorio ha infine permesso di identificare dei dettagli d'armatura ottimizzati per gli angoli di telaio sottoposti a delle sollecitazioni di apertura, per i quali una grande sensibilità alle rotture premature è stata evidenziata da numerose ricerche esistenti nella letteratura scientifica. Dei comportamenti performanti degli angoli esaminati possono infatti essere ottenuti con la disposizione di armature trasversali. Nell'ambito di questa ricerca è stato dimostrato che il dimensionamento di questi elementi può essere effettuato basandosi su dei modelli bielle-e-tiranti o sul metodo dei campi di tensione. Delle indicazioni per il dimensionamento delle armature trasversali sono dunque state stabilite.

Parole-chiave : calcestruzzo armato, elementi curvi, angoli di telaio, sforzo di taglio, sforzo normale, forze di deviazione, modi di trasmissione dello sforzo di taglio, armatura trasversale, teoria della fessura critica, campi di tensione, modelli bielle-e-tiranti.

Zusammenfassung

Stabförmige Stahlbetonstrukturen weisen oftmals Bereiche mit wechselnder Geometrie auf, welche sich aus einem Richtungswechsel oder Sprung der Trägerachse ergeben. Diese Änderungen können wie bei Rahmenecken abrupt sein oder kontinuierlich wie bei gekrümmten Elementen. In diesen Regionen müssen sowohl die Querkräfte, als auch die Normalkräfte umgelenkt werden. Zudem können sich aus den einwirkenden Biegemomenten zusätzliche Umlenkkräfte bilden, welche beim Nachweis der Tragsicherheit zu berücksichtigen sind. Aus den genannten Gründen weisen diese Regionen oftmals einen geringeren Tragwiderstand auf als die restlichen Bereiche, womit sie das Tragwerksverhalten massgeblich beeinflussen. In gekrümmten Elementen kann häufig ein Schubversagen oder das Abplatzen des Überdeckungsbetons beobachtet werden. Die in Rahmenecken auftretenden Umlenkkräfte führen oft zu einem vorzeitigen Versagen in diesem Bereich. Durch eine gute Bewehrungsführung kann dennoch ein zufriedenstellendes Verhalten bezüglich Tragwiderstand und Verformungsvermögen herbeigeführt werden.

In der vorliegenden Forschungsarbeit wurde das Verhalten von gekrümmten Elementen unter Schubbelastung und von sich öffnenden Rahmenecken unter Momentenbeanspruchung untersucht. Die Identifizierung der Hauptparameter, welche das Verhalten derartiger Elemente beeinflussen, ermöglichte die Herleitung von Dimensionierungs- und Nachweismethoden sowohl für gekrümmte Elemente als auch für Rahmenecken. In einem ersten Schritt wurde das Bruchverhalten von nicht gekrümmten Trägern (Elemente ohne geomtrische Veränderungen) untersucht. Als veränderliche Parameter wurden die Trägerschlankheit, variiert durch eine veränderte Geometrie, und die aufgebrachte Normalkraft (z.B. durch eine Vorspannung) berücksichtigt. Diese erste Studie wurde komplettiert durch eine Versuchsserie in welcher, durch die exakte Bestimmung der Risskinematik, der Einfluss der diversen Schubtragmechanismen bestimmt werden konnte.

Der Einfluss der Trägerkrümmung auf den Schubtragwiderstand wurde durch eine zweite Versuchsserie bestimmt. Es konnte gezeigt werden, dass die durch die Krümmung entstehenden Umlenkkräfte einen positiven oder negativen Einfluss auf den Tragwiderstand haben können, je nachdem ob das Element eine konvexe oder konkave Krümmung aufweist. Auf der Basis der Theorie des kritischen Schubrisses wurde ein Modell entwickelt, welches eine Berücksichtigung der Umlenkkräfte zulässt. Das Modell wurde anhand der ausgeführten Versuche validiert.

Eine dritte Versuchsserie an sich öffnenden, stumpfwinkligen Rahmenecken ermöglichte die Bestimmung zweckmässiger Bewehrungsdetails, um diesen bis anhin als spröd geltenden Zonen eine höhere Duktilität zu verleihen. Durch die Verwendung einer Schubbewehrung in der Rahmenecke lässt sich das Tragverhalten erheblich verbessern.

Die Schubbewehrung kann anhand der erarbeiteten Bemessungshinweise und unter Verwendung von Streben-Zugband-Modellen oder Spannungsfeldern dimensioniert werden.

Stichworte : Stahlbeton, gekrümmte Elemente, Rahmenecke, Querkraft, Normalkraft, Umlenkkraft, Schubtragmechanismus, Schubbewehrung, Theorie des kritischen Schubrisses, Spannungsfeld, Streben-Zugband-Modell.

Abstract

Concrete structures usually present regions characterized by changes in the geometry which may be concentrated (such as corners of framed structures) or distributed over a given length (such as arch-shaped members). In these regions, the inner tension and compression chords need to be deviated, originating a state of strains and stresses whose performance (strength and behaviour) depends much on the detailing of the reinforcement. For incorrect detailing, premature brittle failures are observed. This is for instance the case of shear failures or failures due to cover spalling of arch-shaped members and of failures due to deviation forces in corner frames. Suitable detailing leads however to satisfactory behaviour with sufficient strength and deformation capacity.

The present work investigates on the behaviour of these regions and on their suitable detailing. The physical parameters governing their behaviour are identified and consistent rules for their design and assessment are provided. The investigation presents first an overview on the shear transfer mechanisms for straight, prismatic members (members without changes in the geometry). This allows understanding the role of the various physical parameters on the shear strength and in particular of the slenderness and normal forces. This study is completed with a specific testing programme where refined measurements where performed in order to quantify the amount of shear carried by each shear transfer action.

A second test series is later described investigating the behaviour of arch-shaped members failing in shear. The influence of curvature is shown to be beneficial or detrimental depending on the arrangement of the curvature (convex or concave) with respect to the acting shear force. These results have been investigated on the basis of the Critical Shear Crack Theory, which is shown to be suitable for the design of such members if the deviation forces are accounted.

The investigation is completed by a third testing campaign and a series of finite-element analyses on corner frame regions. The aim of this study is to investigate on the suitability of various reinforcement details and to enhance their performance by providing innovative reinforcement arrangements. Considerations for their design based on equilibrium models (strut-and-tie models, stress fields) are finally provided.

Keywords : structural concrete, arch-shaped member, corner frame, shear force, normal force, deviation force, shear transfer mechanism, transverse reinforcement, Critical Shear Crack Theory, stress fields, strut-and-tie models.

Table des matières

Préface i

Remerciements iii

Résumé v

Riassunto vii

Zusammenfassung ix

Abstract xi

Notations xvii

1 Introduction 1

1.1 Problématique . . . 1

1.2 Objectifs, contenus de la thèse et contributions personnelles apportées . . 5

2 Ruptures à l'effort tranchant dans les éléments en béton armé 9

2.1 Modes de transmission de l'effort tranchant dans les éléments fissurés en béton armé . . . 9

2.2 Influence de l'élancement sur la résistance à l'effort tranchant d'éléments en béton armé . . . 13

2.2.1 Région de propagation stable des fissures inclinées . . . 15

2.2.2 Région de propagation instable des fissures inclinées . . . 16

2.2.3 La méthode des champs de contraintes . . . 17

2.2.4 La théorie de la fissure critique . . . 19

2.2.5 Calcul de la vallée de Kani avec la théorie de la fissure critique et la méthode des champs de contraintes . . . 21

2.2.6 Influence d'un effort normal . . . 24

2.3 Influence de l'armature transversale . . . 31

2.4 Conclusions . . . 32

3 Modes de transmission de l'effort tranchant dans les éléments en béton armé 33
3.1 État de l'art et justification de l'étude . . . 33
3.2 Campagne d'essais . . . 34
3.2.1 Spécimens de la série d'essais . . . 34
3.2.2 Discussion des résultats . . . 37
3.3 Mesures de la cinématique des fissures . . . 44
3.4 Analyse des modes de transmission de l'effort tranchant . . . 45
3.4.1 Description du corps rigide étudié . . . 45
3.4.2 Contribution de l'engrènement des granulats . . . 49
3.4.3 Contribution de l'armature transversale . . . 54
3.4.4 Contribution de la résistance résiduelle du béton à la traction . . . 58
3.4.5 Contribution de l'armature flexionnelle (effet goujon) . . . 61
3.4.6 Contribution de la bielle de compression inclinée . . . 65
3.4.7 Discussion des résultats . . . 67
3.4.8 Conclusions . . . 71

4 Comportement d'éléments courbes sans armature transversale soumis à l'effort tranchant 73
4.1 État de l'art et justification de l'étude . . . 73
4.1.1 Interaction moment de flexion / effort tranchant . . . 75
4.1.2 Etat de l'art . . . 77
4.2 Campagne d'essais . . . 79
4.2.1 Spécimens de la série d'essais . . . 79
4.2.2 Discussion des résultats . . . 82
4.3 Analyse des éléments courbes avec la théorie de la fissure critique . . . 88
4.3.1 Rappel des bases de la théorie de la fissure critique . . . 88
4.3.2 Extension de la théorie pour le calcul d'éléments courbes . . . 89
4.3.3 Application du modèle proposé pour l'étude des essais de Kani . . . 100
4.4 Conclusions . . . 104

5 Comportement d'angles de cadre soumis à une sollicitation d'ouverture 107
5.1 État de l'art et justification de l'étude . . . 107
5.1.1 Comportement d'angles orthogonaux . . . 107
5.1.2 Comportement d'angles non orthogonaux . . . 113
5.2 Campagnes d'essais . . . 115
5.2.1 Série préliminaire d'essais . . . 115
5.2.2 Série principale d'essais . . . 119
5.3 Analyse et dimensionnement des angles basés sur la borne inférieure de la théorie de la plasticité . . . 131
5.3.1 Analyse des angles avec la méthode des champs de contraintes élastiques-plastiques . . . 131

5.3.2 Dimensionnement des angles avec des modèles bielles-et-tirants . . 138
5.4 Conclusions 143

6 Conclusions et propositions pour des travaux futurs 145
6.1 Conclusions 145
6.2 Travaux futurs 147

Bibliographie 149

Annexes 159

A Calcul de la cinématique des fissures 160

Notations

Les notations suivantes ont été utilisées dans cette thèse :

A	désignation du type de détail d'armature flexionnelle (armature tendue continue)
A_c	surface de béton
$A_{c,ef}$	surface efficace du béton d'enrobage
A_s	surface de l'armature flexionnelle
A_{sw}	surface de l'armature transversale disposée à l'extérieur de la zone nodale
A_{swn}	surface de l'armature transversale disposée dans la zone nodale
$A_{swn,min}$	surface minimale de l'armature transversale nécessaire dans la zone nodale (pour atteindre l'écoulement de l'armature flexionnelle)
$\overline{A}_w$	somme des surfaces $\overline{a}_w$
$\overline{A}_\Delta$	somme des surfaces $\overline{a}_\Delta$
a	longueur de la portée d'effort tranchant ; désignation du type de détail d'armature secondaire (aucune armature secondaire)
a_{eff}	longueur effective de la portée d'effort tranchant
a_1 et a_2	coefficients pour le calcul du profil des contraintes dans une épingle
$\overline{a}_w$	projection de la surface de contact entre un granulat et la matrice cimentaire sur un axe normal à la fissure
$\overline{a}_\Delta$	projection de la surface de contact entre un granulat et la matrice cimentaire sur un axe tangentiel à la fissure
B	désignation du type de détail d'armature flexionnelle (armature tendue ancrée avec épingles)
b	épaisseur du spécimen ; désignation du type de détail d'armature secondaire (armature diagonale)
b_{ef}	épaisseur effective du spécimen
b_1 et b_2	constantes pour le calcul de la résistance résiduelle du béton à la traction

C	désignation du type de détail d'armature flexionnelle (armature tendue pliée et ancrée dans la zone comprimée)
C_c	force de compression dans le béton
$C_{c,el}$ et $C_{c,pl}$	force de compression dans le béton calculée respectivement selon une approche élastique et plastique
c	demi-longueur à section variable (spécimens analysés par Kani) désignation du type de détail d'armature secondaire (armature transversale)
c_{moy}	valeur moyenne de c_{pos} et c_{neg}
c_{neg}	valeur du Δz_v calculée pour $R_s = -a$
c_{pos}	valeur du Δz_v calculée pour $R_s = a$
c_1 à c_5	désignations du type de détail d'armature secondaire (variantes du type c)
D	désignation du type de détail d'armature flexionnelle (armature tendue en forme de boucle)
D_1 et D_2	désignation du type de détail d'armature flexionnelle (variantes du type D)
d	hauteur statique de l'armature flexionnelle ; désignation du type de détail d'armature secondaire (armature transversale et diagonale)
d_b	diamètre de l'armature flexionnelle
d_{bw}	diamètre de l'armature transversale (épingles)
d_g	diamètre maximal des granulats
$d_{g,0}$	taille de référence des granulats
d_m	hauteur statique moyenne de l'armature (moyenne pondérée de d_p et d_s)
d_{nom}	valeur nominale de la hauteur statique de l'armature flexionnelle
d_p	hauteur statique de l'armature de précontrainte
d_s	hauteur statique de l'armature passive
d_{sf}	hauteur statique de l'armature flexionnelle (calculée à une distance $s + d_{sv}/2$ du centre des spécimens analysés par Kani)
d_{sv}	hauteur statique de l'armature flexionnelle (calculée à une distance s du centre des spécimens analysés par Kani)
d_0	hauteur statique de l'armature flexionnelle (au centre des spécimens analysés par Kani)
d_1	hauteur statique de l'armature flexionnelle (au au bord des spécimens analysés par Kani)
E	désignation du type de détail d'armature flexionnelle (armature tendue continue en forme de boucle)
E_c	module élastique du béton

E_p	module élastique de l'acier de précontrainte
E_s	module élastique de l'acier d'armature
E_{sh}	module d'écrouissage de l'acier d'armature
E_{shw}	module d'écrouissage de l'acier de l'armature transversale
E_{sw}	module élastique de l'acier de l'armature transversale
e	excentricité du chargement
F	force de traction
F_c	force de compression ; chapitre 3 : force de traction dans un tirant en béton non armé
F_{ct}	charge de fissuration d'un tirant en béton non armé
F_{c1} à F_{c4}	forces agissant dans les bielles inclinées (voir modèle bielles-et-tirants)
$F_{c,i-1}$ à $F_{c,i+1}$	forces de compression dans les bielles $i-1$ à $i+1$
$F_{c,n-2}$ et $F_{c,n-1}$	forces de compression dans les bielles $n-2$ et $n-1$
$F_{c,1}$ et $F_{c,2}$	forces de compression dans les bielles 1 et 2
$F_{c,60}$, $F_{c,90}$ et $F_{c,120}$	forces agissant dans les bielles inclinées de la zone nodale pour des angles α respectivement de 60°, 90° et 120°
F_{res}	résistance résiduelle d'un tirant en béton non armé
F_s	force de traction
F_{wn}	force agissant dans le tirant transversal de la zone nodale
f_c	résistance à la compression du béton
f_{cm}	résistance moyenne à la compression du béton (mesurée sur cylindre)
f_{cp}	résistance plastique à la compression du béton
f'_{cp}	résistance à la compression du béton fissuré
f'_{cpi}	résistance à la compression (selon la direction i) du béton fissuré
f'_{cp1} et f'_{cp2}	résistances à la compression (respectivement selon la direction 1 et 2) du béton fissuré
f_{ct}	résistance à la traction du béton
f_{ctm}	résistance moyenne à la traction du béton (mesurée sur cylindre)
$f_{c,cube}$	résistance à la compression du béton (mesurée sur cube)
f_{i-1} à f_{i+1}	forces de déviation agissant dans les positions x_{i-1} à x_{i+1}
f_{n-1} et f_n	forces de déviation agissant dans les positions x_{n-1} et x_n
f_{py}	limite d'écoulement de l'acier de précontrainte
f_{sy}	limite d'écoulement de l'acier d'armature passive
f_t	force de déviation
f_{tw}	résistance à la traction de l'acier de l'armature transversale
f_y	limite d'écoulement de l'acier (armature flexionnelle)
f_{yw}	limite d'écoulement de l'acier d'armature transversale (chapitre 5 : à l'extérieur de la zone nodale)

f_{ywn}	limite d'écoulement de l'acier d'armature transversale dans la zone nodale
f_1 et f_2	forces de déviation agissant dans les positions x_1 et x_2
G_F	énergie de fissuration
h	hauteur du spécimen
i	indice ; chapitre 4 : indice désignant un élément du modèle bielles et tirants ; chapitre 5 : désignation du type de détail d'armature transversale (aucune armature secondaire)
ii à iii	désignation du type de détail d'armature transversale (aucune armature secondaire)
j	indice
k_{ref}	coefficient d'amplification
k_1 et k_2	coefficients pour le calcul du profil des contraintes dans une épingle
L	longueur de la travée
L_{dow}	distance entre l'appui du spécimen et le point de croisement de la branche inclinée de la fissure critique avec l'armature flexionnelle
ℓ_c	distance entre deux ressorts non-linéaires pour la modélisation de la résistance à la traction du béton d'enrobage
ℓ_{i-1} à ℓ_{i+1}	longueurs d'influence des forces $f_{t,i-1}$ à $f_{t,i+1}$
ℓ_{n-1} et ℓ_n	longueurs d'influence des forces $f_{t,n-1}$ et $f_{t,n}$
$\ell_{tot,i}$	longueur contributive pour le calcul de l'ouverture de la fissure i
ℓ_w	distance entre deux épingles
ℓ_1 et ℓ_2	longueurs d'influence des forces $f_{t,1}$ et $f_{t,2}$
M	moment de flexion
M_{epsf}	résistance calculée selon la méthode des champs de contraintes élastique-plastiques (EPSF)
M_{flex}	résistance théorique à la flexion (calculée par un calcul plastique)
$M_{flex,\mathrm{Kani}}$	résistance à la flexion (calculée par Kani)
M_{max}	résistance du spécimen (moment de flexion maximal introduit avant la rupture)
M_p	moment de précontrainte
$M_{R,calc}$	résistance théorique des spécimens (spécimens analysés par Kani)
$M_{R,csct}$	moment de flexion maximal qui peut être repris par la fissure critique (spécimens analysés par Kani)
$M_{\Delta 0}$	moment de flexion à partir duquel un changement considérable de la rigidité du spécimen est observé
$M_{\Delta 20}$	moment de flexion résidu dans le spécimen suite à un incrément de la rotation relative ($\psi_{rel,e}$) de 20 mRad à partir de celle due à $M_{\Delta 0}$

m	gradient de redistribution des efforts entre armature et béton (avant l'écoulement)
m_y	gradient de redistribution des efforts entre armature et béton (après l'écoulement)
N	effort normal
N_{agg}	composante horizontale de la force transmise par engrènement des granulats
N_{ch}	composante horizontale de la force dans la bielle de compression inclinée
N_p	effort normal de précontrainte
N_{res}	composante horizontale de la force transmise par la résistance résiduelle du béton à la traction
N_s	force de traction agissante dans l'armature flexionnelle
n	chapitre 3 : indice pour la désignation d'une épingle chapitre 4 : indice désignant un élément du modèle bielles-et-tirants
p_k	coefficient exprimant la probabilité d'un point donné dans le volume de béton de se trouver à l'intérieur d'un granulat
Q	charge introduite dans le spécimen
Q_{epsf}	résistance calculée selon la méthode des champs de contraintes élastique-plastiques (EPSF)
Q_{max}	résistance du spécimen (charge maximale introduite avant la rupture)
Q_r	charge de fissuration
R	rayon de courbure
R_{avg}	rayon de courbure du spécimen (mesuré à l'axe moyen de la section)
R_s	rayon de courbure de l'armature flexionnelle
r_1 à r_5	rayons de pliage des armatures
s	distance horizontale entre le point de calcul et le centre du spécimen (point de calcul de Δz_v ou de $M_{R,csct}\,(s)$)
s_{wn}	longueur de la diagonale de la zone nodale
$s_{i-1,i}$ et $s_{i,i+1}$	distance entre les fissures $i-1$ et i (ou i et $i+1$)
$s_{1,2}$	distance entre deux fissures traversant une épingle
T_s	force de traction dans l'armature passive
$T_{s,el}$ et $T_{s,pl}$	force de traction dans l'armature passive calculée respectivement selon une approche élastique et plastique
u	ouverture de la fissure mesurée sur un axe horizontal
V	effort tranchant
V_{agg}	composante verticale de la force transmise par engrènement des granulats
V_{cc}	effort tranchant à transmettre au travers de la fissure critique

V_{ch}	composante verticale de la force dans la bielle de compression inclinée
V_{cr}	effort tranchant correspondant à la formation des fissures inclinées
V_{dow}	force transmise par effet goujon de l'armature flexionnelle
V_i	effort tranchant transmis par le mode de transmission i
V_{flex}	effort tranchant correspondant à l'écoulement de l'armature flexionnelle
V_{max}	résistance à l'effort tranchant des spécimens
$V_{max,a}$ et $V_{max,b}$	résistance à l'effort tranchant respectivement du côté du spécimen sans et avec armature transversale
V_p	effort tranchant agissant dans le spécimen au moment où le dernier palier de mesures de la cinématique de la fissure critique a été effectué
V_R	résistance à l'effort tranchant
$V_{R,cc}$	effort tranchant maximal qui peut être transmis à travers la fissure critique
$V_{R,\text{csct}}$	résistance à l'effort tranchant prédite par la théorie de la fissure critique
$V_{R,\text{epsf}}$	résistance à l'effort tranchant prédite par la méthode des EPSF
V_{res}	composante verticale de la force transmise par la résistance résiduelle du béton à la traction
V_{sw}	force totale transmise par l'armature transversale
$V_{sw,n}$	force transmise par l'épingle n
V_{tot}	effort tranchant total transmis à travers la fissure critique
V^*_{max}	résistance à l'effort tranchant normalisée des spécimens
$V^*_{max,a}$ et $V^*_{max,b}$	résistance normalisée à l'effort tranchant respectivement du côté du spécimen sans et avec armature transversale
$V^*_{max,\text{NSC}}$ et $V^*_{max,\text{SCC}}$	résistance normalisée à l'effort tranchant des spécimens fabriqués respectivement avec un béton normal et autoplaçant
$V^*_{max(R=\infty)}$	résistance à l'effort tranchant normalisée du spécimen de référence sans courbure
$V^*_{max(\rho=1.53)}$	résistance à l'effort tranchant normalisée du spécimen de référence avec un taux d'armatuer flexionnelle $\rho = 1.53\%$
v	ouverture de la fissure mesurée sur un axe vertical
v_{dow}	déformation verticale imposée (ouverture verticale de la fissure critique dans son point de croisement avec l'armature flexionnelle)
v_{sw}	ouverture verticale de la fissure dans son point de croisement avec une épingle
v_{swt}	ouverture verticale de la fissure provoquant la rupture de l'épingle (considérant son comportement adhérent avec le béton)
v_{swy}	ouverture verticale de la fissure provoquant l'écoulement de l'épingle (considérant son comportement adhérent avec le béton)

v_{sw1}	ouverture verticale de la fissure critique dans son point de croisement avec une épingle
v_{sw2}	ouverture verticale d'une fissure inclinée supplémentaire (autre que la fissure critique) dans son point de croisement avec une épingle
w	ouverture de la fissure mesurée le long de l'axe y' perpendiculaire à la fissure ; ouverture de la fissure critique
w_{avg}	valeur moyenne de l'ouverture des fissures dans la zone nodale
w_c	ouverture de la fissure à partir de laquelle la résistance résiduelle du béton à la traction est nulle
w_{i-1} à w_{i+1}	ouverture des fissures $i-1$ à $1+1$
w_{max}	valeur maximale de l'ouverture des fissures dans la zone nodale
w_0	partie de l'ouverture de la fissure se produisant avant tout glissement
z	bras de levier (entre les forces internes F_c et F_s)
z_{60}, z_{90} et z_{120}	distances entre la bielle inclinée de la zone nodale et le noeud interne de l'élément pour des angles α respectivement de 60°, 90° et 120°
z_v	distance verticale entre la bielle théorique (appui direct) et l'armature flexionnelle
z_{sv}	bras de levier (calculée à une distance s du centre des spécimens analysés par Kani)
z_{v,R_s}	distance z_v mesurée sur un élément avec courbure
$z_{v,ref}$	distance z_v mesurée sur un élément sans courbure
z_1	distance verticale entre les forces F_s et F_c
x	hauteur de la zone comprimée (calculée selon une approche élastique) ; axe horizontal
x_{agg}, x_{ch}, x_{dow}, x_{res} et $x_{sw,n}$	position des forces V_{agg}, V_{ch}, V_{dow}, V_{res} et $V_{sw,n}$ sur l'axe horizontal
x_{m1}, x_{m2} et x_1, x_2	zones où la contrainte de traction σ_{sw} est inférieure à la limite d'écoulement f_{yw}
x_{i-1} à x_{i+1}	positions des points $i-1$ à $i+1$ sur l'axe x
x_{n-1} et x_n	positions des points $n-1$ et n sur l'axe x
x_{sf}	hauteur de la zone comprimée (calculée à une distance $s + d_{sv}/2$ du centre des spécimens analysés par Kani)
x_{sv}	hauteur de la zone comprimée (calculée à une distance s du centre des spécimens analysés par Kani)
x_{y1} et x_{y2}	zones où la contrainte de traction σ_{sw} est supérieure à la limite d'écoulement f_{yw}
x_1 et x_2	positions des points 1 et 2 sur l'axe x
x'	axe tangentiel à la fissure
y_{agg}, y_{ch}, y_{res}, y_s	position des forces N_{agg}, N_{ch}, N_{res} et N_s sur l'axe vertical

y_{ref}	coefficient définissant la position de la fibre de référence
y'	axe normal à la fissure

Lettres grecques

α	chapitre 2 : orientation des déformations principales ; chapitre 3 : inclinaison de la fissure ; chapitre 4 : inclinaison de la force de traction F_s ; chapitre 5 : amplitude de l'angle du spécimen
α_{ch}	inclinaison de la bielle comprimée
β	inclinaison de la bielle
β_{i-1} à β_{i+1}	inclinaisons des bielles $i-1$ à $i+1$
β_{n-1} et β_n	inclinaisons des bielles $n-2$ et $n-1$
β_1 et β_2	inclinaisons des bielles 1 et 2
β_{60}, β_{90} et β_{120}	amplitude de la déviation exigée par les bielles de la zone comprimée pour des angles α respectivement de 60°, 90° et 120°
γ	inclinaison du déplacement δ par rapport à celle de la fissure
γ_{sv}	inclinaison de la force de compression Fc (calculée à une distance s du centre des spécimens analysés par Kani)
Δ	glissement entre les deux lèvres d'une fissure mesuré le long de l'axe x' parallèle à la fissure
ΔT_p	incrément de force de traction dans l'armature de précontrainte
$\Delta T_{p,el}$ et $\Delta T_{p,pl}$	incrément de force de traction dans l'armature de précontrainte calculée respectivement selon une approche élastique et plastique
ΔV	force de déviation à transmettre à travers la fissure critique
Δz_v	rapport entre les distances z_{v,R_s} et $z_{v,ref}$
$\Delta\omega_{wn}$	incrément du taux mécanique d'armature transversale de la zone nodale donné par un goujon supplémentaire placé dans la zone d'ancrage de l'armature flexionnelle
δ	déplacement entre les deux lèvres d'une fissure (comprenant un incrément de l'ouverture w et du glissement Δ)
δ_b	glissement relatif entre armature et béton
δ_{by}	glissement relatif entre armature et béton (à l'écoulement de l'armature)
δ_v	déformation verticale à mi-travée
$\delta_{v,max}$	déformation verticale à mi-travée mesurée avant la rupture du spécimen
$\delta_{v,max,a}$ et $\delta_{v,max,b}$	déformation verticale maximale à mi-travée mesurée avant la rupture du spécimen respectivement du côté sans et avec armature transversale
ε	déformation longitudinale de la fibre de référence
ε_c	déformation du béton

ε_{ct}	déformation du béton au moment de la fissuration
ε_{c1} et ε_{c2}	déformation principales du béton
ε_s	déformation de l'acier d'armature
ε_{sf}	déformation longitudinale de la fibre de référence (calculée à une distance $s + d_{sv}/2$ du centre des spécimens analysés par Kani)
ε_{sy}	déformation de l'armature au début de l'écoulement
$\varepsilon_{s,i-1}$ à $\varepsilon_{s,i+1}$	déformation de l'armature à l'endroit des fissures $i-1$ à $1+1$
$\dot{\varepsilon}$	vecteur d'incrément de déformation
η_{f_c}	coefficient tenant compte de la fragilité des bétons à haute résistance
η_ε	coefficient tenant compte de la déformation latérale du béton pour la réduction de la résistance du béton fissuré
η_{ε_j}	coefficient tenant compte de la déformation du béton dans la direction j
θ_{i-1} à θ_{i+1}	angles définissant la position des points $i-1$ à $i+1$
θ_{n-1} et θ_n	angles définissant la position des points $n-1$ et n
θ_1 et θ_2	angles définissant la position des points 1 et 2
κ	rugosité de la fissure critique
λ	coefficient définissant le point de calcul de l'angle α
λ_1, λ_2	constantes
μ	coefficient de frottement
ξ	chapitre 3 : tracé de la fissure critique ; chapitre 5 : coefficient définissant la partie des forces internes déviées par l'armature flexionnelle et par l'armature transversale
ρ	taux d'armature flexionnelle
ρ_p	taux d'armature flexionnelle (précontrainte)
ρ_s	taux d'armature flexionnelle (armature passive)
ρ_{sv}	taux d'armature flexionnelle (calculé à une distance s du centre des spécimens analysés par Kani)
ρ_w	taux d'armature transversale (chapitre 5 : à l'extérieur de la zone nodale)
ρ_{wn}	taux d'armature transversale dans la zone nodale
$\rho_{wn,min}$	taux minimal d'armature transversale nécessaire dans la zone nodale (pour atteindre l'écoulement de l'armature flexionnelle)
σ_{agg}	contrainte normale d'engrènement
σ_c	contrainte du béton
σ_{c1} et σ_{c2}	contraintes principales du béton
σ_{pu}	résistance plastique à la compression de la pâte de ciment
σ_{p0}	contrainte initiale dans l'acier de précontrainte
σ_{res}	résistance résiduelle du béton à la traction

σ_s	contrainte dans l'acier d'armature
σ_{sw}	contrainte de traction dans l'armature transversale
$\sigma_{sw,n}$	contrainte de traction dans l'épingle n
σ_{sw1}	contrainte de traction dans une épingle dans son point de croisement avec la fissure critique
$\sigma_{sw1,n}$	contrainte de traction de l'épingle n dans son point de croisement avec la fissure critique
σ_{sw2}	contrainte de traction dans une épingle dans son point de croisement avec une fissure inclinée supplémentaire (autre que la fissure critique)
$\sigma_{s,i-1}$ à $\sigma_{s,i+1}$	contrainte de traction dans l'armature à l'endroit des fissures $i-1$ à $1+1$
$\sigma_{s(N_s)}$	contrainte de traction dans l'armature flexionnelle due à N_s
$\sigma_{s(V_{dow})}$	contrainte de traction dans l'armature flexionnelle due à V_{dow}
σ_x	contrainte tangentielle
σ_y	contrainte radiale
σ_1	contrainte principale
τ_{agg}	contrainte tangentielle d'engrènement
τ_b	contrainte d'adhérence
τ_{b0}	contrainte d'adhérence avant l'écoulement de l'armature
τ_{b1}	contrainte d'adhérence après l'écoulement de l'armature
τ_{xy}	contrainte de cisaillement
χ	courbure
ψ_{rel}	rotation relative de l'angle du spécimen
$\psi_{rel,e}$	rotation relative mesurée aux extrémités du spécimen
$\psi_{rel,n}$	rotation relative mesurée dans la zone nodale du spécimen
ω	taux mécanique d'armature flexionnelle
ω_{wn}	taux mécanique d'armature transversale dans la zone nodale
$\omega_{wn,min}$	taux mécanique minimal d'armature transversale nécessaire dans la zone nodale (pour atteindre l'écoulement de l'armature flexionnelle)

Autres symboles

Ø	diamètre de l'armature

Acronymes

CCC	Compression-Compression-Compression
CCT	Compression-Compression-Traction
CSCT	Critical Shear Crack Théorie (théorie de la fissure critique)
CTT	Compression-Traction-Traction

EPSF	Elastic Plastic Stress Fields (méthode des champs de contraintes élastiques-plastiques)
MTET	Modes de Transmission de l'Effort Tranchant
TTT	Traction-Traction-Traction

Chapitre 1

Introduction

1.1 Problématique

Les structures en béton armé sont fréquemment caractérisées par la présence de régions particulières à travers lesquelles les efforts nécessitent d'être déviés. Comme mis en avant par la figure 1.1, la nécessité de dévier les efforts peut être due à des changements abrupts ou progressifs de la géométrie de la structure, notamment de la direction de sa ligne moyenne (voir respectivement les figures 1.1(a) et 1.1(b)) ou de la géométrie de sa section (figures 1.1(c) et 1.1(d)).

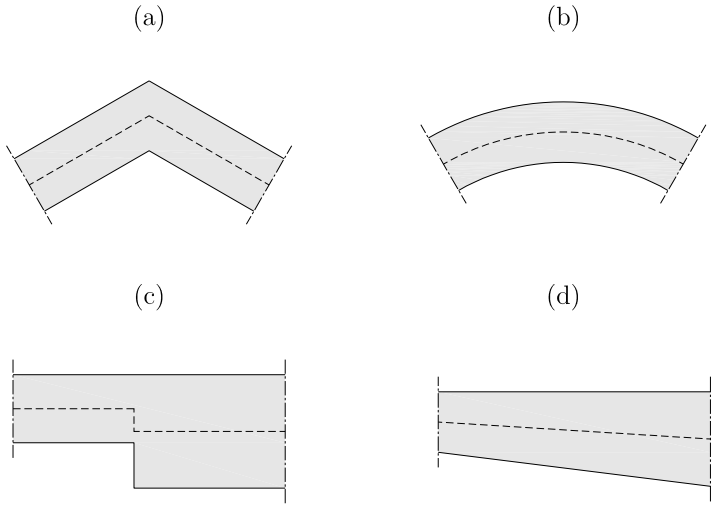


Fig. 1.1: Régions particulières dans les structures en béton armé, où les efforts nécessitent d'être déviés : **(a)** changement abrupt de la direction de la ligne moyenne de la structure ; **(b)** changement progressif de la direction de la ligne moyenne de la structure ; **(c)** changement abrupt de la géométrie de la section de la structure ; et **(d)** changement progressif de la géométrie de la section de la structure

La nécessité de dévier les efforts dans ces régions particulières se trouve souvent à la base des ruptures intervenant avant que l'écoulement des armatures puisse être atteint dans la structure. Dans ces cas, les théories classiques des poutres ne sont généralement

pas applicables (à cause des forces de déviation qui seraient négligées), et des méthodes particulières sont à utiliser pour le dimensionnement. Selon les cas, ces ruptures prématurées possèdent un caractère plus ou moins fragile, influençant de façon plus ou moins marquée le comportement global de la structure.
Afin de mettre en avant les différents modes de rupture pouvant intervenir dans ces régions, un exemple basé sur le comportement d'une tranchée couverte est illustré dans la figure 1.2. Toutefois, il sera mis en avant dans la suite que des conditions similaires peuvent se retrouver dans un nombre important de structures en béton armé. Les figures 1.2(a) et 1.2(b) présentent une structure à section transversale respectivement en forme de voûte et polygonale. Il peut être remarqué que les deux solutions constructives sont concernées par la présence de régions similaires à celles mises en avant à la figure 1.1.

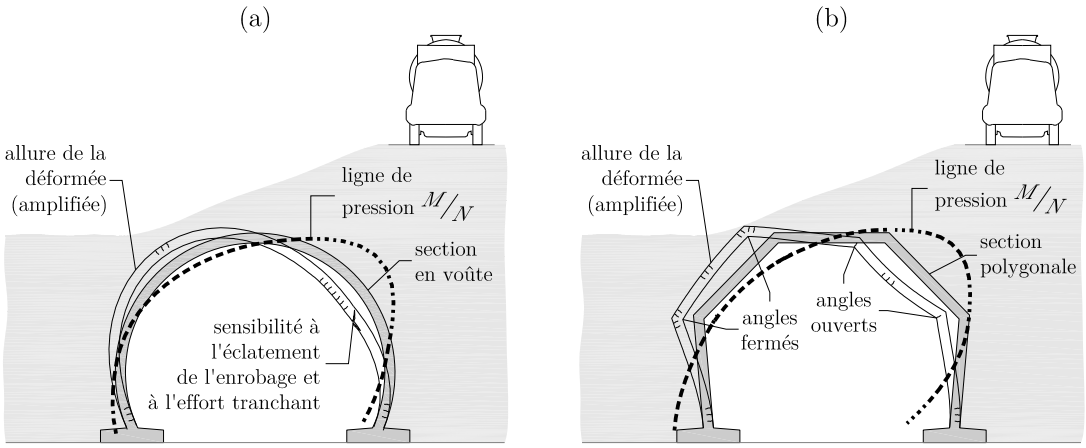


Fig. 1.2: Analyse du comportement d'une tranchée couverte soumise à un chargement asymétrique et ayant une section transversale en forme : **(a)** de voûte ; et **(b)** polygonale

Les deux structures sont soumises à un cas de chargement asymétrique, qui a pour effet de décaler sensiblement la ligne de pression par rapport à la ligne moyenne de la section de la structure. La position de la ligne de pression est définie par le rapport M/N entre le moment de flexion (M) et l'effort normal (N) agissant en chaque point de la structure. Par conséquent, l'excentricité de la ligne de pression par rapport à la ligne moyenne de la structure indique l'importance des moments de flexion qui la sollicitent. De plus, l'intensité des efforts tranchants (V) peut également être appréciée en considérant la pente de la ligne de pression relative à celle de la ligne moyenne de la structure. Les figures 1.2(a) et 1.2(b) montrent également l'allure amplifiée de la déformation de la structure. Les considérations suivantes peuvent être faites sur la base de ces figures :

– dans la structure en forme de voûte, l'excentricité du chargement donne lieu à des zones dans lesquelles les moments de flexion sont particulièrement importants. L'action des moments de flexion conduit au développement de forces de déviation dues à la courbure de l'armature flexionnelle ainsi qu'à celle de la membrure comprimée. Comme il a été montré par plusieurs recherches [Fei74, Int04, Fer10], ces forces de déviation

peuvent conduire à des ruptures par éclatement du béton d'enrobage (figure 1.3(a)), se produisant également avant la plastification des armatures.

– Dans les mêmes régions, il peut être observé une présence d'efforts tranchants particulièrement importants pouvant éventuellement provoquer une rupture prématurée des éléments courbes, également en combinaison avec l'éclatement du béton d'enrobage (figure 1.3(b)) [Int04].

– Dans le cas de la structure à forme polygonale, les forces de déviation se développent de façon concentrée au droit des régions nodales (figure 1.3(c)). Selon le type d'excentricité de la ligne de pression, ces régions nodales peuvent donc être soumises à une sollicitation d'ouverture ou de fermeture [Cam10], en combinaison à des efforts internes pouvant être conséquent. Comme il a été mis en avant dans les années '70 par plusieurs auteurs [Swa69, Kor70, May71, Bal72, Nil73, Van76, Noo77], le comportement des régions nodales soumises à une sollicitation d'ouverture peut se révéler particulièrement problématique, notamment avec le développement des fissures diagonales qui limitent leur capacité de déviation des efforts.

– Il peut aussi être remarqué que les régions rectilignes de la structure polygonale sont généralement soumises à une combinaison d'efforts internes (M, V et N) d'une intensité conséquente. L'interaction de l'effort normal (N) avec le moment de flexion (M) et l'effort tranchant (V) doit donc être considérée pour le calcul du comportement flexionnel des éléments ainsi que pour leur comportement face à l'effort tranchant [Fer09a].

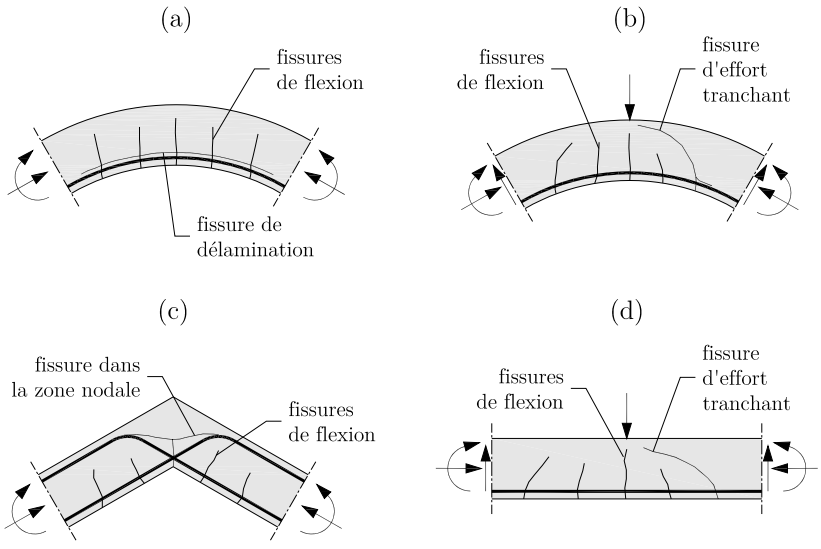


Fig. 1.3: Ruptures prématurées qui peuvent se déclencher dans les structures en béton : **(a)** éclatement du béton d'enrobage dans les éléments courbes ; **(b)** effort tranchant dans les éléments courbes ; **(c)** fissuration diagonale dans les angles de cadre ; et **(d)** effort tranchant dans les éléments rectilignes

Comme mis en avant par la figure 1.4, de nombreuses structures en béton armé peuvent être concernées par les problématiques propres aux éléments courbes (éclatement du

béton d'enrobage et ruptures d'effort tranchant). En effet, des situations similaires se retrouvent par exemple : dans les ponts en arc (figure 1.4(a)), dans les silos et dans les structures submergées (figure 1.4(b)), dans les conduites et dans les tunnels (figure 1.4(c)) ainsi que dans les voûtes et dans les coques (figure 1.4(d)). La figure 1.5 montre qu'également la problématique des régions nodales soumises à des sollicitations d'ouverture ou de fermeture se retrouve dans plusieurs typologies de structures en béton armé, à savoir : les cadres (figure 1.5(a)), les cages d'escaliers (figure 1.5(b)), les cadres des bâtiments multi-étage (figure 1.5(c)), les murs de soutènement et de rétention (figure 1.5(d)), les silos (figure 1.5(e)) ainsi que les structures plissées (figure 1.5(f)).

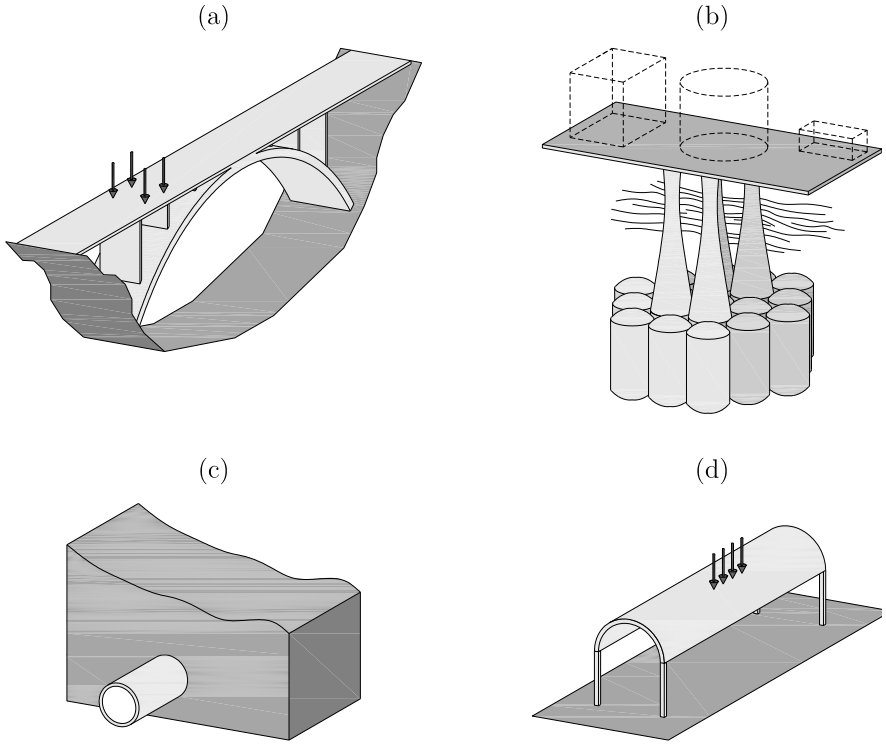


Fig. 1.4: Structures en béton armé comprenant des éléments courbes soumis à une combinaison de moments de flexion et d'effort tranchants : **(a)** ponts en arc ; **(b)** silos et structures submergées ; **(c)** conduites et tunnels ; et **(d)** voûtes et coques

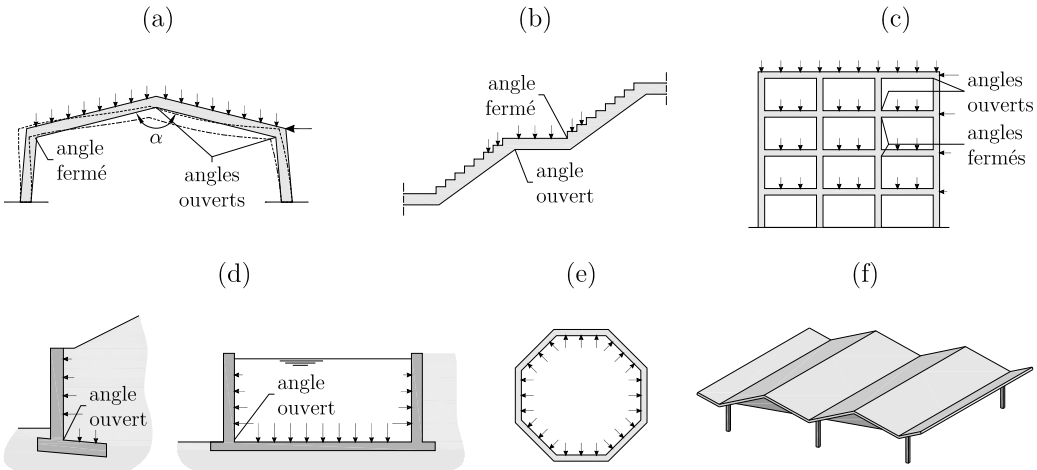


Fig. 1.5: Structures en béton armé avec régions nodales soumises à des sollicitations de fermeture et/ou d'ouverture : **(a)** cadres ; **(b)** cages d'escaliers ; **(c)** cadres de bâtiments multi-étage ; **(d)** murs de soutènement et de rétention ; **(e)** silos ; et **(f)** structures plissées

1.2 Objectifs, contenus de la thèse et contributions personnelles apportées

L'objectif de cette thèse est de participer aux réflexions sur les thématiques du comportement d'éléments courbes soumis à des sollicitations d'effort tranchant ainsi que celui d'angles de cadre soumis à des sollicitations d'ouverture, pour pouvoir identifier les paramètres principaux influençant leur réponse afin de développer des techniques pour leur vérification et leur dimensionnement. La démarche utilisée pour cette recherche est la suivante :

1. Une étude initiale a été effectuée pour la compréhension des modes de rupture à l'effort tranchant qui s'observent dans les éléments en béton armé, sans ou avec peu d'armature transversale (figure 1.6(a)). Une attention particulière a été accordée à la compréhension de l'effet de l'élancement des éléments sur les caractéristiques de leur mode de rupture ainsi qu'à l'effet d'un effort normal sur leur élancement effectif et par conséquent sur leur mode de rupture. Les résultats de cette recherche initiale sont présentés dans le chapitre 2, dans lequel sont également introduites les bases des théories utilisées dans la suite du travail, à savoir : la théorie de la fissure critique [Mut08a], pour l'étude du comportement des éléments courbes soumis à l'effort tranchant, et la méthode des champs de contraintes élastiques-plastiques [Fer07a], pour l'analyse des angles de cadre soumis à une sollicitation d'ouverture. Les contributions personnelles suivantes ont donc été apportées dans le cadre de cette étude :

   – validation de la théorie de la fissure critique [Mut08a] et de la méthode des

champs de contraintes élastiques-plastiques [Fer07a] pour le calcul de la vallée de Kani.

- Mise en évidence de l'effet d'un effort normal de compression sur l'élancement effectif des éléments. Validation du modèle proposé [Mut08a] basée sur une série d'essais effectuée sur des spécimens précontraints [Saq09, Fer09a].

2. Une étude détaillée visant à la compréhension des modes de transmission de l'effort tranchant a été effectuée sur la base d'essais d'effort tranchant sur des poutres droites en béton armé, sans ou avec peu d'armature transversale [Ana09] (figure 1.6(b)). Cette campagne expérimentale, qui est présentée dans le chapitre 3 s'est avérée nécessaire car l'importance relative de chaque mode de transmission de l'effort tranchant dans la réponse globale des éléments n'est aujourd'hui pas encore connue de manière exhaustive dans la littérature. De plus, les résultats de cette étude ont permis de préparer au mieux l'étude et la compréhension des ruptures à l'effort tranchant dans les éléments courbes qui a suivi. Les contributions personnelles suivantes ont été apportées dans le cadre de cette étude :

   - mise en évidence de la cinématique des fissures dans des poutres en béton armé sollicitées à l'effort tranchant, sans ou avec peu d'armature transversale.
   - Exploitation des mesures de la cinématique de la fissure critique pour la quantification détaillée des contributions de chaque mode de transmission de l'effort tranchant, dans le cas d'éléments avec peu d'armature transversale.
   - Utilisation d'un modèle d'engrènement des granulats [Wal80, Gui10] pour la quantification de l'effort transmis au travers de la fissure critique, et adaptation de ce modèle pour la prise en compte de la granulométrie réelle du béton.
   - Quantification de l'effort transmis au travers de la fissure critique par l'armature transversale, effectuée sur la base du comportement adhérent entre l'acier et le béton.
   - Développement d'un modèle cohésif de fissuration pour la quantification de l'effort transmis au travers de la fissure critique par effet goujon de l'armature flexionnelle.
   - Quantification de l'effort transmis au travers de la fissure critique par activation de la résistance résiduelle à la traction du béton [Hil83, Hor92].
   - Quantification et mise en évidence d'une variabilité importante (influencée par la forme et la cinématique de la fissure critique) dans la réponse des éléments en béton armé au sujet des modes de transmission de l'effort tranchant au travers de la fissure critique.

3. Une campagne expérimentale a été effectuée pour l'analyse du comportement d'éléments courbes en béton armé sans armature transversale face aux sollicitations

d'effort tranchant [Cam12] (figure 1.6(c)). Le but principal de cette série d'essais, qui est présentée dans le chapitre 4, était de comprendre les effets de la courbure des éléments et de leur taux d'armature flexionnelle sur la résistance à l'effort tranchant, afin de les considérer dans leur analyse basée sur la théorie de la fissure critique. Les contributions personnelles suivantes ont donc été apportées dans le cadre de cette étude :

- mise en évidence de l'effet de la courbure des éléments (positif ou négatif en fonction du type de courbure) sur leur résistance à l'effort tranchant.
- Développement d'un modèle pour la prise en compte des forces de déviation dans le cadre de l'analyse des éléments courbes avec la théorie de la fissure critique [Mut08a].
- Proposition pour la prise en compte des variations dans la position de la bielle théorique d'appui direct dans le cadre de l'analyse des éléments courbes avec la théorie de la fissure critique [Mut08a].

4. Une analyse des nombreux essais existants dans la littérature concernant des angles de cadre soumis à des sollicitations d'ouverture et de fermeture a permis de mettre en avant les problématiques principales reliées à ce type d'éléments. Sur la base de cette analyse, une campagne expérimentale a été effectuée sur des angles de cadre soumis à une sollicitation d'ouverture, dans le but d'identifier des solutions constructives adaptées afin d'obtenir un comportement idéal de ces éléments [Cam10, Cam11a, Cam11b] (figure 1.6(d)). Les résultats de ces essais, qui sont présentés dans le chapitre 5, ont été utilisés afin de valider la pertinence de la méthode des champs de contraintes pour l'analyse de ces éléments. Les contributions personnelles suivantes ont été apportées dans le cadre de cette étude :
   - mise en route d'un système de photogrammétrie pour le suivi du comportement des éléments en cours d'essai.
   - Identification des détails d'armature adaptés pour les cas d'angles de cadre soumis à une sollicitation d'ouverture.
   - Validation de la méthode des champs de contraintes élastiques-plastiques [Fer07a] pour l'analyse du comportement des angles de cadre soumis à une sollicitation d'ouverture.
   - Proposition d'un modèle bielles-et-tirants pour le dimensionnement de l'armature transversale nécessaire à garantir un comportement ductile des éléments.
   - Étude paramétrique effectuée avec la méthode des champs de contraintes [Fer07a] afin de comprendre le comportement de zones nodales en fonction de l'amplitude de leur angle et de leur taux d'armature flexionnelle.
   - Proposition d'une formulation analytique pour le dimensionnement de l'armature transversale.

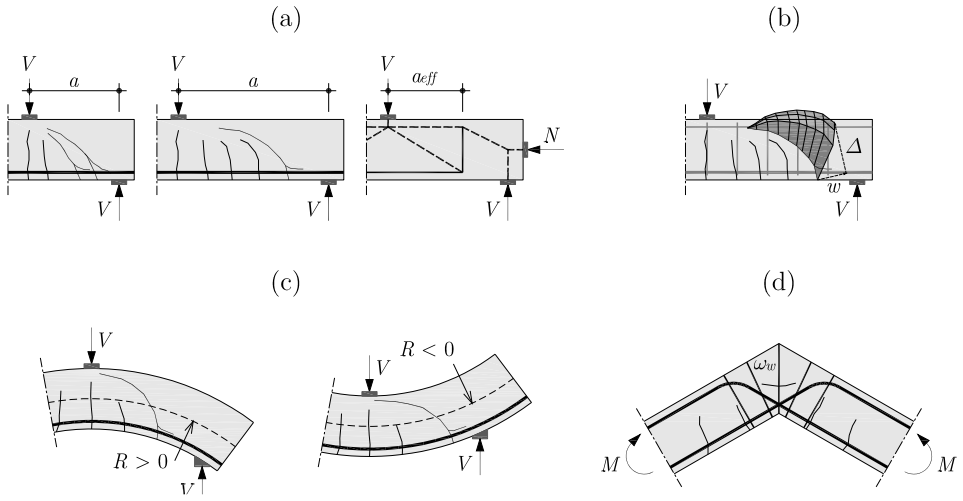


Fig. 1.6: Thèmes traités dans les chapitres de cette thèse : **(a)** influence de l'élancement des éléments sur les modes de rupture à l'effort tranchant et influence de l'effort normal sur l'élancement ; **(b)** quantification de la contribution des modes de transmission de l'effort tranchant basée sur la cinématique de la fissure critique ; **(c)** comportement d'éléments courbes soumis à l'effort tranchant ; et **(d)** comportement d'angles de cadre soumis à une sollicitation d'ouverture et dimensionnement de l'armature transversale nécessaire

Chapitre 2

Ruptures à l'effort tranchant dans les éléments en béton armé

2.1 Modes de transmission de l'effort tranchant dans les éléments fissurés en béton armé

Dans les éléments en béton armé non fissurés, la transmission des charges peut être analysée par la théorie de l'élasticité (figure 2.1(a)). Ceci n'est plus le cas dès que des fissures apparaissent dans les éléments, aux endroits où la résistance à la traction du béton est atteinte. Dans le cas d'une poutre en béton armé fléchie, ceci survient à cause de l'action des moments de flexion quand la charge Q atteint la charge de fissuration Q_r. Des fissures verticales se forment initialement à partir de la face tendue des éléments (figure 2.1(b)), dans les régions où les moments de flexion sont plus importants. Ensuite, au fur et à mesure que la charge augmente ($Q > Q_r$), d'autres fissures apparaissent à proximité des appuis (figure 2.1(b)).

Suite à la fissuration des éléments, plusieurs modes de transmission de l'effort tranchant doivent s'activer afin de garantir la transmission des charges aux appuis. Les modes de transmission principaux sont les suivants :

– l'engrènement des granulats (figure 2.2(a)) : le frottement entre les deux lèvres d'une fissure permet la transmission d'efforts de part et d'autre de celle-ci (se référer aux bielles inclinées de la figure 2.2(a)). L'intensité du frottement est influencée par la rugosité des lèvres de la fissure, par sa forme et par son ouverture. En particulier, une capacité inférieure de transmission des efforts sera observée avec l'augmentation de l'ouverture de la fissure ou avec la diminution de sa rugosité. Les principes physiques de ce mode de transmission de l'effort tranchant ont été étudiés par de nombreux auteurs [Tay70, Pau74a, Wal80, Mil84, Mil85, Dei87, Zar97, Ula03, Sag11].

– l'effet goujon de l'armature flexionnelle (figure 2.2(b)) : l'armature flexionnelle entourée par le béton dispose d'une certaine rigidité au cisaillement. Cette dernière permet

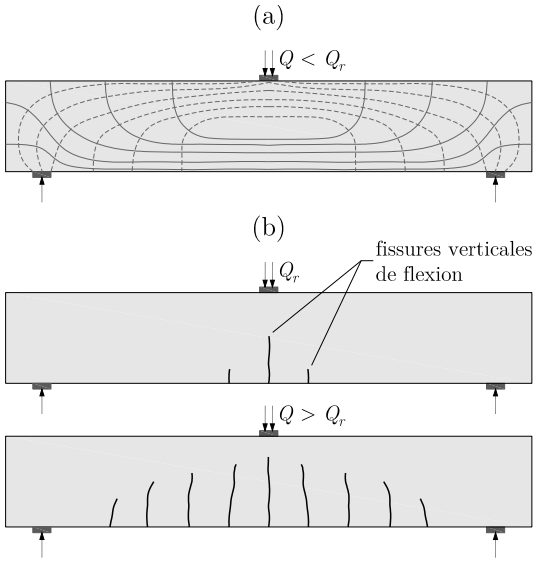


Fig. 2.1: Fissuration dans les poutres en béton armé fléchies : **(a)** comportement élastique avant fissuration ; et **(b)** développement des fissures de flexion

la transmission d'un effort de part et d'autre de chaque fissure (se référer aux couples de bielles et de tirants qui s'appuient sur l'armature flexionnelle à l'endroit de chaque fissure, voir figure 2.2(b)). L'intensité de l'effort qui peut être transmis par ce mode de transmission dépend évidemment de la rigidité au cisaillement de l'armature, qui est à son tour influencée par son diamètre, mais également par la rigidité (épaisseur) du béton d'enrobage ainsi que par sa résistance à la traction. Les principes physiques de ce mode de transmission de l'effort tranchant ont été étudiées par de nombreux auteurs [Kre66a, Kre66b, Tay69, Pau74b, Mil84, Mil85, Cha87, Dei92, Dei93, Jel99, Zar03].

– l'effet porte-à-faux (figure 2.2(c)) : les dents de béton (*concrete teeth*, comme nommés par Kani [Kan64]) qui sont définies par deux fissures successives, sont sollicitées par un effort horizontal au niveau de l'armature flexionnelle. Cet effort horizontal, qui est dû à la variation de l'effort de traction agissant dans l'armature (lequel augmente en direction du centre de la poutre en raison de la valeur croissante du moment de flexion), est en équilibre avec une bielle et un tirant inclinés (figure 2.2(c)). Ces derniers permettent la transmission d'un effort tranchant d'un dent à l'autre. Chaque dent peut être alors considéré comme étant une console encastrée dans la zone comprimée, d'où la dénomination d'effet porte-à-faux.

– l'inclinaison de la bielle comprimée (figure 2.2(d)) : un effort tranchant peut être transmis vers les appuis par le développement d'une bielle inclinée au delà de la zone fissurée. Dans ces cas, l'intensité de l'effort tranchant transféré correspond à celle de la composante verticale de l'effort de compression agissant dans la bielle. Des travaux pour investiguer le phénomène ont été récemment conduits en particulier par Tureyen et Frosch [Tur03].

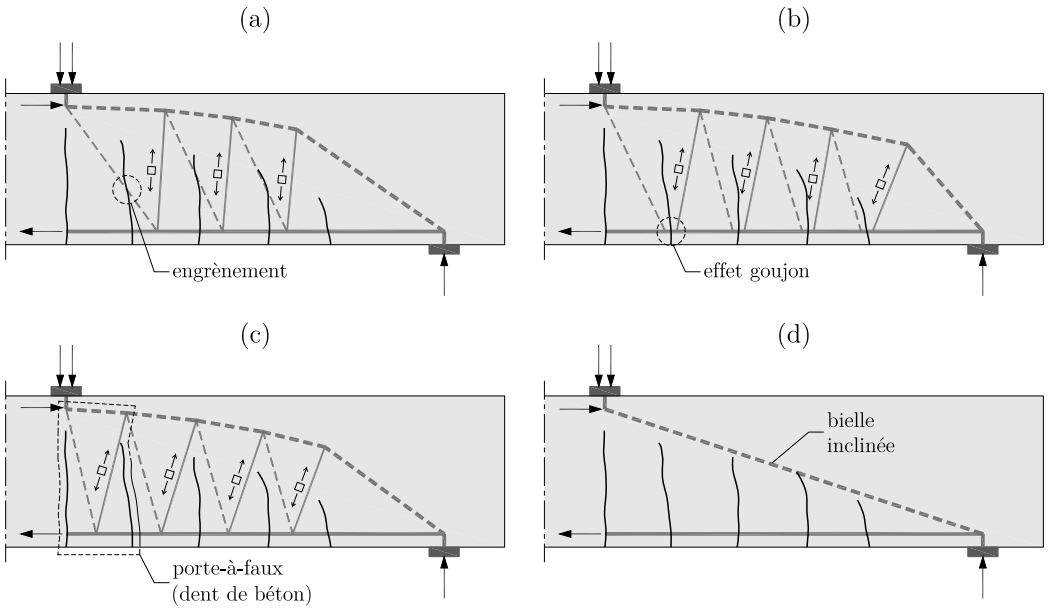


Fig. 2.2: Modes de transmission de l'effort tranchant dans les éléments en béton armé fissurés : **(a)** engrènement des granulats ; **(b)** effet goujon de l'armature flexionnelle ; **(c)** effet porte-à-faux ; et **(d)** inclinaison de la bielle comprimée

Le comportement réel d'un élément fissuré résultera de l'action combinée de tous ces modes de transmission de l'effort tranchant (figure 2.3(a)). Comme mis en avant par les figures 2.2(a-c), les modes de transmission précédemment décrits sont concernés par la formation de tirants inclinés qui sollicitent la partie à mi-hauteur des éléments à la traction. Un incrément de charge peut augmenter les efforts dans ces tirants jusqu'à l'atteinte de la résistance à la traction du béton (f_{ct}), faisant par conséquent évoluer la fissuration des éléments. La figure 2.3(b) (inspirée de [Mut08a]) montre que, à cause de l'inclinaison des tirants, les fissures verticales de flexion peuvent évoluer avec une certaine inclinaison en direction du point d'application de la charge. De plus, des fissures de délamination se forment le long de l'armature flexionnelle. Ces fissures sont aussi dues aux contraintes de traction générées par les tirants inclinés.

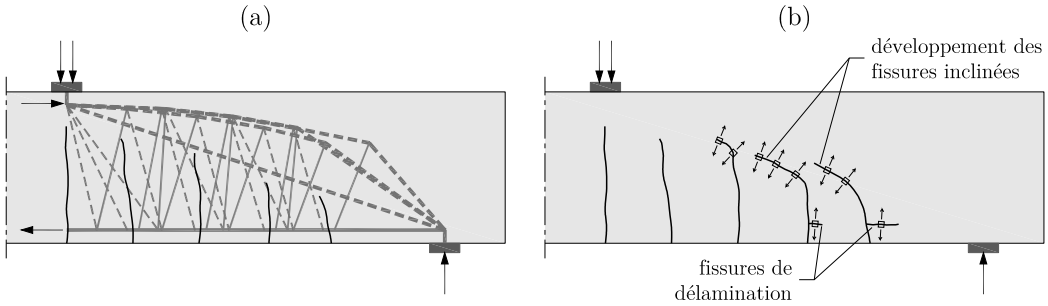


Fig. 2.3: Modes de transmission de l'effort tranchant dans les éléments en béton armé fissurés : **(a)** action combinée des différents modes de transmission ; et **(b)** évolution inclinée des fissures et développement des fissures de délamination

L'évolution des fissures inclinées a pour effet de limiter, voir d'empêcher complètement, l'action des tirants inclinés dans la partie à mi-hauteur de l'élément (figure 2.4). Par conséquent, la capacité des modes de transmission de l'effort tranchant précédemment décrits diminue au fur et à mesure que la charge augmente. Ceci est mis en avant, pour chacun des modes de transmission de l'effort tranchant précédemment décrits, aux figures 2.4(a) à 2.4(d) qui montrent les nouveaux modèles bielles-et-tirants en comparaison avec ceux des figures 2.2(a) à 2.2(d). Toutefois, si l'ouverture des fissures inclinées reste limitée, une certaine capacité de transmission des efforts de traction à travers les fissures est assurée par la résistance résiduelle à la traction du béton (σ_{res}, voir figure 2.4) [Hil83, Hor92]. Ce phénomène, qui sera décrit avec plus de détails dans le chapitre 3, représente donc un mode supplémentaire de transmission de l'effort tranchant, dans le sens qu'il permet de limiter l'affaiblissement des modes de transmission précédemment décrits. Il convient de souligner que, comme mis en avant par ces figures, au fur et à mesure que les tirants inclinés se désactivent, la membrure inclinée a tendance à développer un appui direct. Comme montré par la figure 2.4(d), la transmission d'un effort tranchant par une bielle inclinée reste potentiellement possible, grâce à la formation d'un mécanisme permettant la déviation de cette bielle pour le contournement des fissures [Mut08a]. Si cette déviation ne se met pas en place, la transmission de l'effort tranchant peut se faire par engrènement des granulats (figure 2.2(a)). Si la charge augmente d'avantage, l'action combinée des différents modes de transmission de l'effort tranchant ne sera plus suffisante pour permettre la transmission de la totalité de l'effort aux appuis, ce qui peut conduire à des ruptures par effort tranchant. Les caractéristiques de ces ruptures seront analysées en détail dans la section 2.2, en prenant en compte l'élancement des éléments.

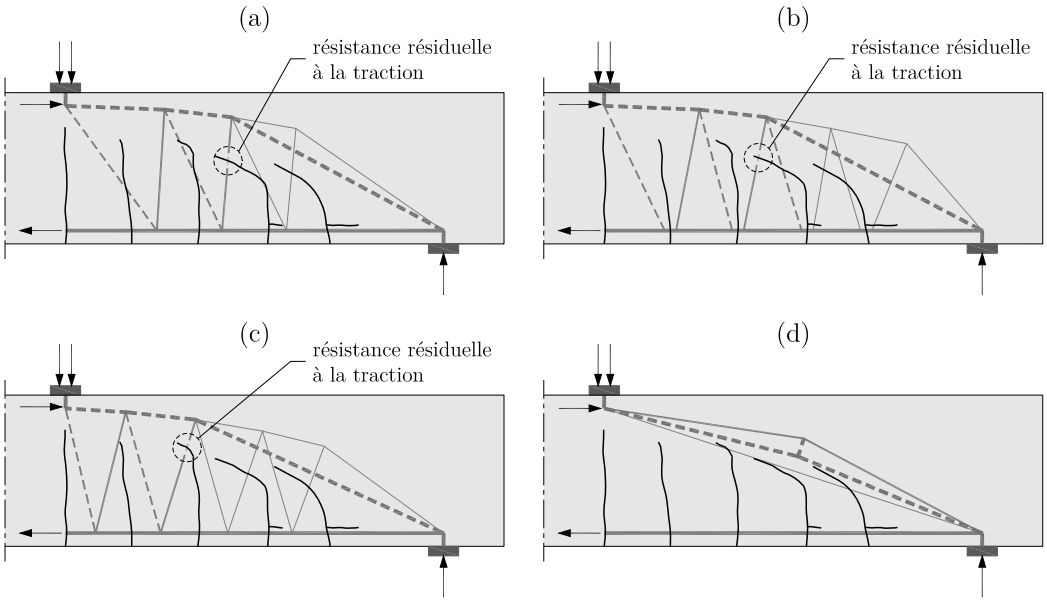


Fig. 2.4: Processus d'affaiblissement de la capacité de transmission de l'effort tranchant dû au développement des fissures inclinées : **(a)** engrènement des granulats ; **(b)** effet goujon de l'armature flexionnelle ; **(c)** effet porte-à-faux ; et **(d)** inclinaison de la bielle comprimée

2.2 Influence de l'élancement sur la résistance à l'effort tranchant d'éléments en béton armé

Le développement des fissures inclinées dans les éléments en béton armé et le conséquent affaiblissement des modes de transmission de l'effort tranchant peut éventuellement conduire à des ruptures prématurées par effort tranchant. Cette problématique a été étudiée de façon étendue par Kani [Kan64, Kan66, Kan67, Kan79] ainsi que par Leonhardt et Walther [Leo62] qui ont montré que la réponse des éléments varie en fonction de leur élancement et que dans certains cas la résistance plastique ne peut pas être atteinte. Ces recherches ont permis de mettre en évidence une plage d'élancements dans laquelle des ruptures prématurées par effort tranchant sont observées. Ceci est mis en avant par la figure 2.5 qui montre de manière qualitative la relation entre l'élancement des éléments et leur comportement.

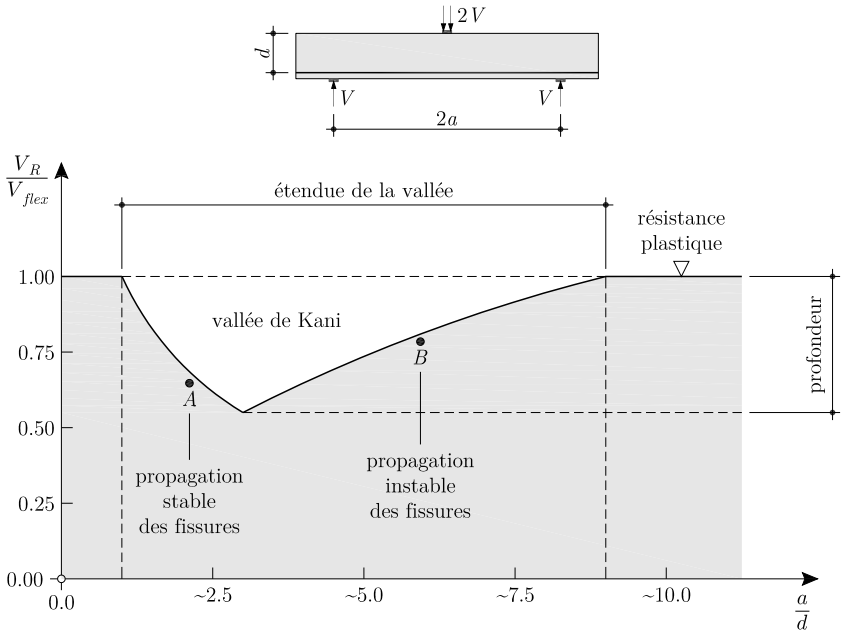


Fig. 2.5: Vallée de Kani : définition de la zone de sensibilité aux ruptures d'effort tranchant en fonction de l'élancement des éléments

L'élancement des éléments peut être quantifié par le rapport a/d entre la longueur de la portée d'effort tranchant (a) et la hauteur statique de l'armature flexionnelle (d). Le comportement des éléments peut être apprécié par le rapport V_R/V_{flex} entre la résistance effective des éléments (V_R) et leur résistance plastique théorique (V_{flex}) qui peut être calculée par :

$$V_{flex} = \frac{\rho\, b\, d^2\, f_y \left(1 - \dfrac{\rho\, f_y}{2\, f_{cp}}\right)}{a} \tag{2.1}$$

où ρ est le taux d'armature flexionnelle, b l'épaisseur de l'élément, f_y la limite d'écoule-

ment de l'armature flexionnelle et f_{cp} la résistance plastique à la compression du béton. Cette dernière peut être calculée à partir de la résistance à la compression mesurée sur cylindre (f_c) en tenant compte de la fragilité des bétons à haute résistance (coefficient η_{f_c}) [Mut97] :

$$f_{cp} = \eta_{f_c}\, f_c = \sqrt[3]{\frac{30}{f_c}}\, f_c \leq f_c \qquad \text{[MPa]} \tag{2.2}$$

Un rapport $V_R/V_{flex} = 1$ indique que la résistance plastique est atteinte. Au contraire, un rapport $V_R/V_{flex} < 1$ indique une rupture prématurée. Comme il peut être remarqué dans la figure 2.5, la région concernée par les ruptures prématurées rappelle la forme d'une vallée : d'où la définition de *vallée de Kani* [Kan79]. Cette figure montre que les ruptures particulièrement prématurées s'observent généralement pour des élancements a/d compris entre 2 et 3. Cependant, l'étendue (qui défini la plage d'élancements à l'intérieur de laquelle les éléments sont sensibles aux ruptures d'effort tranchant) et la profondeur (qui définie l'importance de leur sensibilité aux ruptures d'effort tranchant) de la vallée de Kani sont influencées par de nombreux paramètres, à savoir :

– le taux d'armature flexionnelle (ρ) et la limite d'écoulement de l'armature flexionnelle (f_y) : pour des valeurs modérés du taux d'armature flexionnelle ou de la limite d'écoulement, la résistance plastique des éléments peut être atteinte plus facilement. Pour cette raison, le risque de ruptures avant l'écoulement de l'armature flexionnelle diminue. Au contraire, des taux d'armature flexionnelle ou des limites d'écoulement élevés augmentent fortement le risque de ruptures avant l'écoulement, ce qui donne lieu à une vallée de Kani plus profonde et plus étendue [Kan64].

– la hauteur statique (d) : pour des élancements a/d constants, les éléments avec des hauteurs statiques importantes sont plus sensibles aux ruptures se produisant avant l'écoulement de l'armature flexionnelle. Ceci a été démontré par Kani [Kan67], et s'explique par le fait que des hauteurs statiques élevées impliquent une ouverture plus importante des fissures, ce qui affecte fortement le fonctionnement des modes de transmission de l'effort tranchant, conduisant à une réduction de la résistance des éléments. Cet effet de taille s'observe en particulier pour les éléments les plus élancés.

– les propriétés du béton : les résistances du béton à la compression (f_c) et à la traction (f_{ct}) ainsi que le diamètre maximal des granulats (d_g) peuvent aussi influencer la forme de la vallée de Kani. Leur rôle sera discuté ultérieurement (voir sections 2.2.3 et 2.2.4).

Les recherches effectuées par Kani [Kan79] ainsi que par Leonhardt et Walther [Leo62] ont également permis de mettre en évidence différents modes de rupture. En particulier, des différences sont observées en comparant les ruptures des éléments dont l'élancement modéré les placent sur le flanc gauche de la vallée de Kani (branche descendante de la vallée, se référer au point A de la figure 2.5) à celles des éléments avec un élancement supérieur, qui se trouvent donc sur le flanc droit de la vallée (branche ascendante de la vallée, se référer au point B de la figure 2.5).

2.2.1 Région de propagation stable des fissures inclinées

Les éléments se trouvant sur le flanc gauche de la vallée de Kani présentent des élancements plutôt modérés. Dans ces cas, la petite distance entre le point d'introduction de la charge et les appuis permet le développement d'une bielle d'appui direct (figure 2.6(a)). Ces éléments sont caractérisés par le développement d'une ou plusieurs fissures inclinées qui peuvent pénétrer dans la région de la bielle et influencer sa résistance [Zha07a, Zha07b, Sag08].
Comme il a été démontré par Vecchio et Collins [Vec86], la résistance à la compression du béton fissuré (f'_{cp}) peut être inférieure à celle du béton non fissuré (f_{cp}). En particulier, des fissures dont l'orientation est différente de celle de la bielle de compression, qui provoquent donc une déformation latérale, peuvent diminuer sensiblement la résistance du béton ($f'_{cp} < f_{cp}$, voir figure 2.6(b)). Pour cette raison, la capacité de la bielle d'appui direct (figure 2.6(a)) se réduit au fur et à mesure que la charge augmente, car la pénétration des fissures inclinées dans la bielle évolue. Contrairement aux éléments se situant sur le flanc droit de la vallée de Kani (dont le mode de rupture sera discuté ultérieurement) [Fer09a], le développement des fissures inclinées se fait de façon stable. En effet, après la formation des fissures inclinées, leur ouverture et leur pénétration dans la région de la bielle progressent doucement avec l'augmentation de la charge jusqu'à que la résistance de la bielle ne suffit plus à transmettre la charge aux appuis, conduisant ainsi à la rupture. Pour ces raisons, l'effet de taille est plutôt nuancé dans le cas de ces éléments [Zha07b].

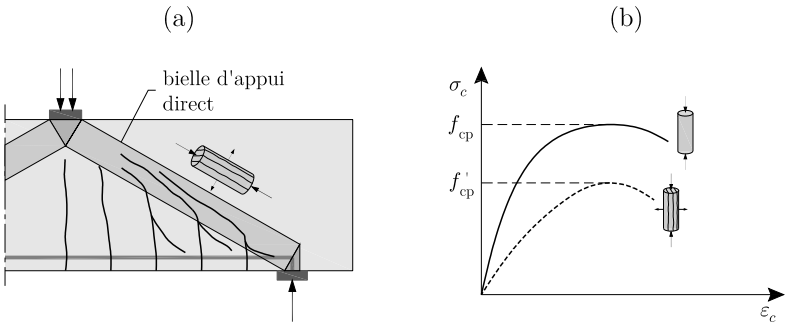


Fig. 2.6: Rupture à l'effort tranchant typiquement observée pour les éléments dont l'élancement les placent sur le flanc gauche de la vallée de Kani **(a)** position de la bielle d'appui direct et des fissures inclinées ; et **(b)** effet de la fissuration sur la résistance à la compression du béton en fonction de la déformation latérale

Pour les éléments avec un faible élancement, les ruptures se produisent donc par écrasement du béton dans la région de la bielle d'appui direct, à cause de son affaiblissement dû à la pénétration des fissures inclinées et à la déformation transversale. Généralement, les résistances de ces éléments sont caractérisées par une dispersion importante, ce qui explique la pente plus prononcée du flanc gauche de la vallée de Kani (figure 2.5). Ceci est dû au fait que les résistances sont fortement influencées par la position de la bielle d'appui directe relative à celle des fissures inclinées, qui peut varier sensiblement d'un élément à l'autre. Compte tenu du type de rupture qui les caractérisent, le compor-

tement de ces éléments peut être analysé avec la méthode des champs de contraintes élastiques-plastiques [Fer07a], dont les bases sont expliquées dans la section 2.2.3.

2.2.2 Région de propagation instable des fissures inclinées

Les éléments se trouvant sur le flanc droit de la vallée de Kani présentent des élancement plutôt marqués. Dans ces cas, les ruptures sont dues au développement de fissures inclinées qui présentent une propagation instable. Généralement, une localisation importante des déformations à l'endroit d'une seule fissure est observée avant la rupture. Cette fissure, dite *fissure critique*, se développe rapidement en affectant sensiblement le fonctionnement des modes de transmission de l'effort tranchant décrits dans la section 2.1. La figure 2.7(a) montre qu'au fur et à mesure que la fissure critique se développe, l'importance de l'engrènement des granulats pour la transmission des charges aux appuis augmente (figure 2.7(b)). Ceci peut d'une part être expliqué par le fait que les autres modes de transmission de l'effort tranchant se voient fortement affaiblis par la présence des fissures inclinées (figure 2.4) et d'autre part par le fait que l'engrènement des granulats se voit fortement activé en raison des caractéristiques de la cinématique de la fissure critique, dont les deux lèvres montrent un glissement relatif important (en particulier dans sa partie plus raide, voir figure 2.7(a)).

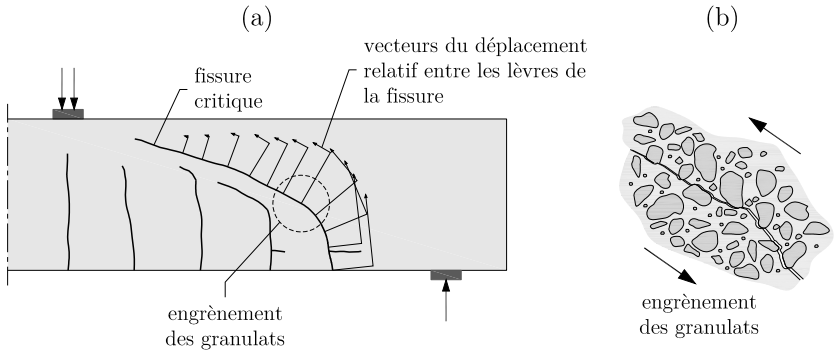


Fig. 2.7: Rupture à l'effort tranchant typiquement observée pour les éléments dont l'élancement les placent sur le flanc droit de la vallée de Kani : **(a)** position, forme et cinématique qualitatives de la fissure critique ; et **(b)** engrènement des granulats entre les lèvres de la fissure critique

Pour les éléments situés sur le flanc droit de la vallée de Kani, les ruptures se produisent ainsi quand la capacité de transmission de l'effort tranchant à travers la fissure critique n'est plus suffisante pour transmettre la totalité de la charge, en raison de l'ouverture trop importante de la fissure critique. Pour ces raisons, un effet de taille plutôt marqué s'observe pour ce type d'éléments. Compte tenu du type de rupture qui les caractérisent, le comportement de ces éléments peut être analysé, par exemple, avec la théorie de la fissure critique [Mut08a], dont les bases sont expliquées dans la section 2.2.4.

2.2.3 La méthode des champs de contraintes

Pour autant que l'effet négatif de la fissuration dans la résistance des bielles de compression soit considéré (figure 2.6(b)) [Vec86], la méthode des champs de contraintes [Mut97, Mar99, Fer07a], qui se base sur la borne inférieure de la théorie de la plasticité, peut être utilisée pour l'analyse des éléments sans armature transversale dont l'élancement les placent sur le flanc gauche de la vallée de Kani (figure 2.5). Pour rappel, les ruptures de ces éléments sont dues à l'écrasement de la bielle d'appui direct qui est pénétrée par des fissures inclinées (figure 2.6(a)).
La méthode des champs de contraintes élastiques-plastiques (en anglais : *Elastic Plastic Stress Fields method*, indiquée par la suite avec le terme EPSF) [Fer07a], a un intérêt particulier dans le cadre de cette thèse. Cette méthode, qui implémente toutes les hypothèses de base de la théorie des champs de contraintes, permet en effet la génération automatique de champs de contraintes licites et en équilibre statique avec les forces extérieures, tenant compte des propriétés plastiques des matériaux et de l'influence négative de la fissuration sur la résistance à la compression du béton, par exemple à l'aide de la loi de Vecchio et Collins [Vec86]. L'intérêt de cette méthode est donnée par la simplicité de ces hypothèses de base et par le nombre limité de paramètres requis pour la modélisation des éléments ainsi que leur claire signification physique (résistances et modules élastiques des matériaux, comme il sera montré dans la suite).
La figure 2.8 met en avant les principes de la modélisation utilisée pour le comportement du béton et de l'acier [Fer07a]. Sur la base d'un champ de déplacement défini dans le milieu continu, les déformations principales (ε_{c1} et ε_{c2}) ainsi que leur orientation (α) peuvent être calculées (figure 2.8(a)). Les contraintes principales (σ_{c1} et σ_{c2}) en sont ensuite déduites en admettant que leur direction est identique à celle des déformations principales (angle α, voir figure 2.8(a)) [Wag29]. Le comportement non-linéaire du béton est pris en compte en admettant une loi élastique-parfaitement plastique pour sa réponse à la compression et en négligeant sa résistance à la traction (figure 2.8(b)). Le fait de négliger la résistance à la traction du béton, implique que les modes de transmission de l'effort tranchant montrés aux figures 2.2(a-c) (engrènement des granulats, effet goujon et effet porte-à-faux) ne peuvent pas se développer dans le cadre d'une analyse avec la méthode des EPSF. La résistance à la compression du béton fissuré (f'_{cp}) est déduite à partir de sa résistance plastique à la compression (f_{cp}, voir équation 2.2), et en tenant compte de sa déformation latérale (facteur η_ε) :

$$f'_{cpi} = \eta_{\varepsilon_j}\, f_{cp} \leq f_{cp} \qquad i = 1, \ldots, 2 \quad (j = 2, \ldots, 1) \tag{2.3}$$

Le calcul du coefficient η_{ε_j}, dont la valeur dépend de la déformation latérale du béton (ε_j), peut être effectué selon les propositions de Collins et al. [Col96] :

$$\eta_{\varepsilon_j} = \frac{1}{0.8 + 170\,\varepsilon_j} \tag{2.4}$$

La modélisation utilisée pour le comportement du béton correspond à la surface de plas-

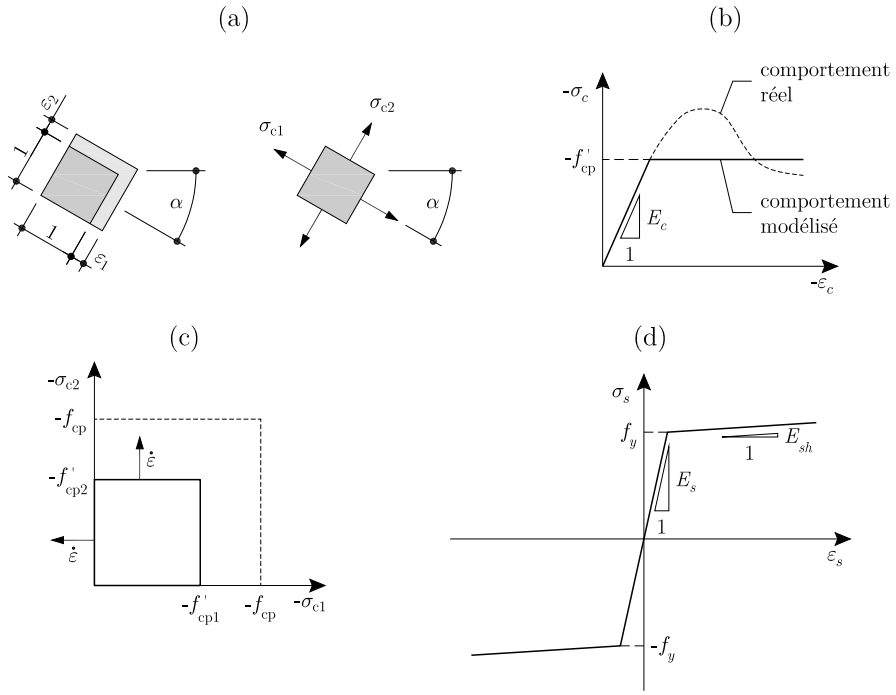


Fig. 2.8: Modélisation utilisée pour le calcul des champs de contraintes élastiques-plastiques : **(a)** direction des déformations et des contraintes principales ; **(b)** surface de plasticité du béton et considération de plasticité associée ; **(c)** comportement élastique-parfaitement plastique du béton ; et **(d)** comportement élastique-plastique de l'acier

ticité de Mohr-Coulomb modifiée (avec *tension cut-off*) [Nie99], avec considération de plasticité associée (vecteur d'incrément de déformation $\dot{\varepsilon}$ normal à la surface de plasticité, voir figure 2.8(c)), où l'effet d'une déformation latérale de traction est pris en compte par un rétrécissement de la surface de plasticité (effet de Vecchio et Collins [Vec86], voir figure 2.8(c)). Le comportement non-linéaire de l'acier à la traction et à la compression est pris en compte en admettant une loi bi-linaire d'abord élastique, jusqu'à l'écoulement (f_y), et ensuite plastique (avec éventuellement un comportement écrouissant, voir figure 2.8(d)). Le comportement de l'acier est considéré uni-axial. Par conséquent, l'effet goujon des armatures (figure 2.2(b)) est négligé. Une adhérence parfaite est considérée entre l'acier et le béton. Compte tenu de ses hypothèses, les éléments peuvent être analysés en utilisant un nombre réduit de paramètres : la résistance plastique à la compression (f_{cp}) et le module élastique (E_c) du béton ainsi que la limite d'écoulement (f_y) et les modules élastique (E_s) et d'écrouissage (E_{sh}) de l'acier.

La méthodes des EPSF est un outil pratique et fiable pour l'analyse du comportement des éléments en béton armé [Fer07a, Kos09, Cam10]. Ceci est particulièrement vrai si les conditions de base pour le développement d'un champ de contrainte sont respectées. La condition plus importante est la disposition d'une armature minimale pour le contrôle de la fissuration [Mut97, Fer07a], permettant aux éléments d'atteindre des comportements plastiques. Dans le cas des éléments en béton armé sans armature transversale et avec un

élancement limité (flanc gauche de la vallée de Kani, voir figure 2.5), plusieurs fissures, avec une ouverture limitée, se développent dans la zone de la bielle. Une localisation des déformations n'est pas observée dans ces cas, ce qui rend la méthode des EPSF applicable malgré l'absence d'une armature transversale minimale. Une validation de cette méthode pour l'étude du flanc gauche de la vallée de Kani est faite dans la section 2.2.5.

2.2.4 La théorie de la fissure critique

La théorie de la fissure critique (en anglais : *Critical Shear Crack Theory*, indiquée par la suite avec le terme CSCT), initialement introduite par Muttoni et Schwartz [Mut91], peut être utilisée pour l'analyse des éléments sans armature transversale dont l'élancement les placent sur le flanc droit de la vallée de Kani (figure 2.5). Pour rappel, les ruptures de ces éléments sont dues à la localisation des déformations à l'endroit de la fissure critique, ce qui active de manière particulièrement prononcée l'engrènement des granulats (figure 2.7).
Selon cette théorie, et comme exprimé par l'équation 2.5, la résistance d'un élément à l'effort tranchant dépend de sa géométrie (définie par l'épaisseur b de l'élément et par la hauteur statique d de l'armature flexionnelle), de la racine carrée de la résistance à la compression du béton ($\sqrt{f_c}$) [Mod54] ainsi que de l'ouverture (w) et de la rugosité (κ) de la fissure critique. Ces deux derniers paramètres permettent d'apprécier l'intensité de l'effort tranchant qui peut être transmis à travers la fissure critique (V_{cc}) par activation de l'engrènement des granulats (figure 2.7) :

$$V_{cc} = b\, d\, \sqrt{f_c}\, f\,(w, \kappa) \tag{2.5}$$

Selon les propositions de Muttoni [Mut03], la rugosité de la fissure critique (κ) peut être appréciée par la taille maximale des granulats (d_g). Ceci est vrai pour des bétons de résistance normale ($f_{cp} < 60$ MPa) et avec des granulats suffisamment résistants, ce qui évite le développement des fissures à travers les granulats. Dans le cas contraire, d'autres paramètres deviennent déterminants [Sag11]. De plus, l'ouverture de la fissure critique (w) peut être considérée comme étant proportionnelle au produit entre une déformation longitudinale de référence (ε) et la hauteur statique de l'armature flexionnelle (d) :

$$w \propto \varepsilon\, d \tag{2.6}$$

Comme montrée à la figure 2.9, la déformation longitudinale de référence (ε) peut être calculée dans une fibre de référence (figure 2.9(b)) à l'endroit d'une section de contrôle (figure 2.9(a)). Selon les propositions de Muttoni [Mut03], la section de contrôle se situe à une distance $d/2$ du point d'application de la charge et la fibre de référence à une distance $y_{ref}d$ de la fibre comprimée de l'élément, où $y_{ref} = 0.6$ pour les éléments droits (une discussion sur la valeur de y_{ref} pour les éléments courbes est faite au chapitre 4). Il en résulte que :

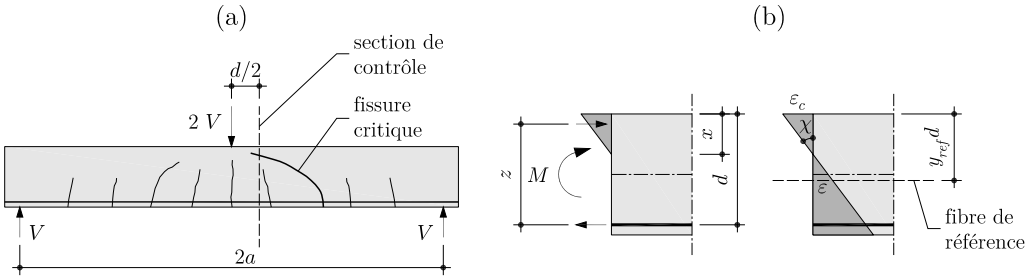


Fig. 2.9: Bases de la théorie de la fissure critique : **(a)** position de la section de contrôle ; et **(b)** définition de la fibre de référence et calcul élastique-fissuré de la déformation longitudinale de référence

$$\varepsilon = \frac{V\left(a - \frac{d}{2}\right)(y_{ref}d - x)}{b\,d\,E_s\left(d - \frac{x}{3}\right)(d - x)} \tag{2.7}$$

où V est la valeur de l'effort tranchant agissant dans l'élément, a la longueur de la portée d'effort tranchant, b l'épaisseur et d la hauteur statique de l'élément, E_s le module élastique de l'armature flexionnelle et x la hauteur de la zone comprimée. Cette dernière peut être calculée en considérant un comportement élastique fissuré de la section :

$$x = d\,\rho\,\frac{E_s}{E_c}\left(\sqrt{1 + \frac{2\,E_c}{\rho\,E_s}} - 1\right) \tag{2.8}$$

où ρ est le taux d'armature flexionnelle et E_c le module élastique du béton. Avec ces hypothèses, le critère de rupture de la théorie de la fissure critique, qui défini la résistance normalisée ($V_{R,\mathrm{csct}}/\left(b\,d\,\sqrt{f_c}\right)$) des éléments à l'effort tranchant, peut être exprimé par la relation suivante [Mut08a] :

$$\frac{V_{R,\mathrm{csct}}}{b\,d\,\sqrt{f_c}} = \frac{1}{3}\frac{1}{1 + 120\,\frac{\varepsilon\,d}{d_{g,0} + d_g}} \tag{2.9}$$

où $d_{g,0} = 16$ mm est la taille de référence des granulats. Ce critère de rupture, qui a été dérivé sur la base d'un nombre de données expérimentales avec lesquelles il montre une très bonne corrélation (figure 2.10) [Mut08a], permet de tenir compte de l'effet de taille qui est observé dans la résistance des éléments. En effet, le rapport $\varepsilon\,d$ accroît avec l'augmentation de la hauteur statique des éléments, ce qui diminue leur résistance normalisée. Ceci est logique car l'augmentation de la hauteur statique fait accroître l'ouverture des fissures, conduisant à une diminution de la capacité de transmission de l'effort tranchant par engrènement des granulats. De plus, il convient de remarquer qu'une rugosité importante de la fissure critique (représentée par une valeur élevée de d_g) conduit à des résistances supérieures, ce qui est logique car la capacité de transmission de l'effort tranchant par engrènement des granulats augmente avec l'accroissement de la rugosité.

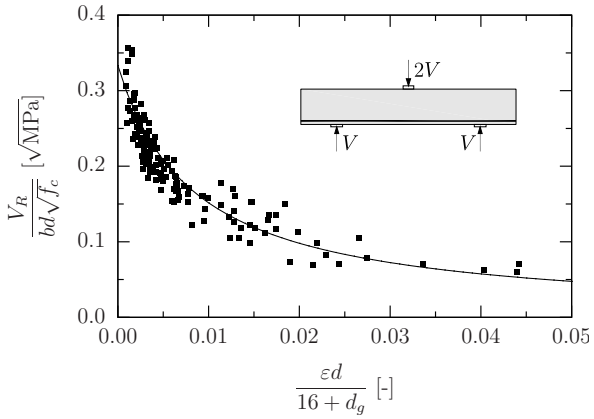


Fig. 2.10: Critère de rupture de la théorie de la fissure critique et comparaison avec les résultats d'essais sur poutres sans armature transversale et soumises à une charge ponctuelle

Une validation de cette théorie pour l'étude du flanc droit de la vallée de Kani est faite dans la section 2.2.5 et son application pour le cas d'éléments soumis à des efforts normaux est discutée dans la section 2.2.6. De plus, le chapitre 4 présente les résultats d'une étude effectuée afin d'étendre cette théorie pour la prise en compte des forces de déviation qui se développent dans les éléments courbes en béton armé sans armature transversale. D'avantages d'informations au sujet de cette théorie peuvent être consultées ailleurs pour ce qui concerne les poutres [Mut08a, Vaz10] et les dalles [Mut08b, Fer09b].

2.2.5 Calcul de la vallée de Kani avec la théorie de la fissure critique et la méthode des champs de contraintes

Comme il l'a été expliqué dans les sections 2.2.3 et 2.2.4, la méthode des EPSF [Fer07a] ainsi que la théorie de la fissure critique [Mut08a] peuvent être utilisées pour l'étude des éléments se trouvant respectivement sur le flanc gauche et droit de la vallée de Kani (figure 2.5). Les séries d'essais de Kani [Kan79] et de Leonhardt et Walther [Leo62], effectuées pour l'étude de l'effet de l'élancement des éléments (a/d) sur leur résistance à l'effort tranchant, peuvent être utilisées pour une validation de ces deux méthodes. Ce travail a été effectué pour :

– une série d'essais conduite par Kani [Kan79] et comprenant 15 spécimens (spécimens 81 à 84, 88 et 91 à 100, voir tableau 2.1) avec une géométrie de la section et un taux d'armature flexionnelle nominaux constants ($b = 153$ mm, $d = 272$ mm et $\rho = 2.80\%$). Les propriétés nominales des matériaux étant également constantes ($d_g = 19$ mm, $f_c = 26$ MPa et $f_y = 345$ MPa), le seul paramètre étudié par cette série d'essai est le rapport a/d qui est compris entre 1.0 et 8.0.

– Une série d'essais conduite par Leonhardt et Walther [Leo62] et comprenant 14 spécimens (spécimens 1 à 6, 7-1 à 10-1 et 7-2 à 10-2, voir tableau 2.2) avec un géométrie de la section et un taux d'armature flexionnelle nominaux constants ($b = 190$ mm, $d = 270$ mm et $\rho = 2.05\%$). Les propriétés nominales des matériaux étant également

constantes (d_g = 16 mm, f_c = 30 MPa et f_y = 474 MPa), le seul paramètre étudié par cette série d'essai est le rapport a/d qui est compris entre 1.0 et 8.0.

Tab. 2.1: Caractéristiques des spécimens de la série d'essais effectuée par Kani [Kan79] pour l'étude de l'effet de l'élancement des spécimens sur leur résistance à l'effort tranchant

spécimen	a	b	d	$\frac{a}{d}$	ρ	f_y	f_c[a]	V_{flex}	V_R	$\frac{V_R}{V_{flex}}$
	[mm]	[mm]	[mm]	[-]	[%]	[Mpa]	[Mpa]	[kN]	[kN]	[-]
81	1629	153	274	5.94	2.76	343	27.5	55.6	51.2	0.92
82	2170	155	271	8.00	2.77	343	27.5	41.2	40.3	0.98
83	814	156	271	3.00	2.73	343	27.4	109.4	64.9	0.59
84	1087	151	271	4.01	2.83	342	27.4	81.4	55.4	0.68
88	271	153	266	1.02	2.81	401	31.4	368.3	359.6	0.98
91	1626	154	269	6.05	2.71	364	27.4	55.5	51.0	0.92
92	1898	152	270	7.03	2.72	369	27.4	48.0	45.8	0.96
93	1762	155	273	6.46	2.66	372	30.3	54.2	53.8	0.99
94	544	153	273	1.99	2.78	352	25.3	165.9	110.5	0.67
95	677	153	275	2.46	2.75	338	25.3	130.1	72.7	0.56
96	1084	153	275	3.94	2.76	335	25.3	80.8	56.3	0.70
97	815	152	276	2.95	2.68	366	27.2	114.8	62.5	0.54
98	678	153	275	2.47	2.69	366	26.2	136.2	76.3	0.56
99	679	152	272	2.50	2.73	366	26.2	134.0	77.2	0.58
100	545	153	270	2.02	2.74	366	27.2	167.4	111.9	0.67

a : mesurée sur cylindre

Une comparaison entre les résistances des spécimens et les résistances prédites est présentée aux figures 2.11(a) et 2.11(b) respectivement pour la série d'essais de Kani [Kan79] et pour celle de Leonhardt et Walther [Leo62]. L'élancement des spécimens (rapport a/d) a été calculé en considérant la distance entre les axes de la charge et des réactions. Dans le cas de la série d'essais de Kani [Kan79], les prédictions de résistance sont montrées par des fuseaux afin de tenir compte de la dispersion non négligeable des propriétés effectives des spécimens (ρ, f_y et f_c, voir tableau 2.1). Les résultats obtenus montrent une bonne corrélation entre les résistances des spécimens et celles prédites par la théorie de la fissure critique ainsi que par la méthode des EPSF. Cette dernière montre des résultats plutôt conservatifs, ce qui peut s'expliquer par le fait que la résistance à la traction du béton est négligée par cette méthode (voir section 2.2.3). L'utilisation de ces deux méthodes s'avère donc justifiée.

Tab. 2.2: Caractéristiques des spécimens de la série d'essais effectuée par Leonhardt et Walther [Leo62] pour l'étude de l'effet de l'élancement des spécimens sur leur résistance à l'effort tranchant

spécimen	a	b	d	$\frac{a}{d}$	ρ	f_y	f_c [a]	V_{flex}	V_R	$\frac{V_R}{V_{flex}}$
	[mm]	[mm]	[mm]	[-]	[%]	[Mpa]	[Mpa]	[kN]	[kN]	[-]
1	270	190	270	1.00	2.07	474	29.1	418.5	396.0	0.95
2	400	190	270	1.48	2.07	474	29.1	282.5	265.0	0.94
3	540	190	270	2.00	2.07	474	29.1	209.3	150.0	0.72
4	670	190	270	2.48	2.07	474	29.1	168.7	84.8	0.50
5	810	190	270	3.00	2.07	474	29.1	139.5	68.3	0.49
6	1100	190	270	4.07	2.07	474	29.1	102.7	63.8	0.62
7-1	1350	190	278	4.86	2.01	474	30.5	87.4	61.0	0.70
7-2	1350	190	278	4.86	2.01	474	30.5	87.4	67.0	0.77
8-1	1620	190	278	5.83	2.01	474	30.6	72.8	64.0	0.88
8-2	1620	190	274	5.91	2.04	474	30.6	71.6	64.0	0.89
9-1	1890	190	273	6.92	2.04	474	31.3	61.1	55.5	0.91
9-2	1890	190	273	6.92	2.04	474	32.3	61.3	55.5	0.90
10-1	2160	190	272	7.94	2.05	474	29.6	52.9	48.0	0.91
10-2	2160	190	272	7.94	2.05	474	29.6	52.9	52.5	0.99

a : mesurée sur cube (conversion utilisée : $f_c = f_{c,cube}/0.8$)

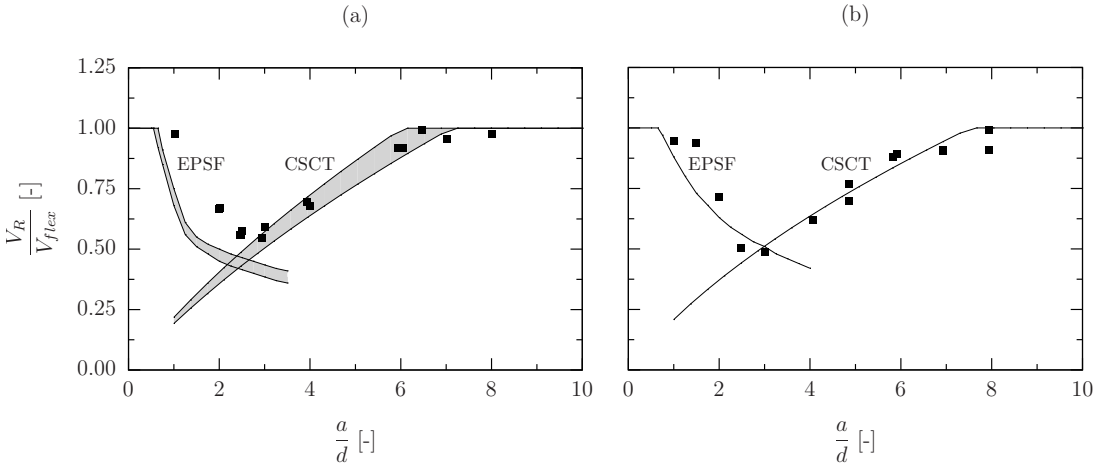


Fig. 2.11: Comparaison entre les résultats d'essais effectués sur spécimens avec un élancement variable et les prédictions de résistance obtenues avec la méthode des EPSF et la théorie de la fissure critique : **(a)** série d'essais effectuée par Kani [Kan79] ; et **(b)** série d'essais effectuée par Leonhardt et Walther [Leo62]

2.2.6 Influence d'un effort normal

Parmi les éléments en béton armé sollicités à la flexion (M) et à l'effort tranchant (V), il n'est pas rare d'en trouver qui sont également soumis à des efforts normaux (N). Ces derniers peuvent être dus à la forme de la structure, à la configuration de la charge ainsi qu'à la présence de la précontrainte. L'action d'un effort normal peut entraîner des différences dans la réponse des éléments face à l'effort tranchant. En effet, un effort normal de compression peut contribuer à la limitation de l'ouverture des fissures, ce qui se traduit par une résistance supérieure à l'effort tranchant (se référer aux équations 2.6 et 2.9). Au contraire, un effort normal de traction peut augmenter d'avantage la sensibilité des éléments face aux ruptures d'effort tranchant.
En se référant aux principes de la vallée de Kani (figure 2.5), l'effet d'un effort normal de compression peut être interprété comme étant une réduction de l'élancement des éléments. Ceci est mis en avant par les figures 2.12(a) et 2.12(b), qui comparent la forme et la position de la bielle théorique d'appui direct respectivement pour les éléments sans et avec effort normal. La figure 2.12(b) montre qu'en présence de l'effort normal de compression (N), le développement des fissures dans la région de l'appui est empêché, ce qui peut retarder les ruptures par effort tranchant. Selon le modèle bielles-et-tirants de la figure 2.12(b), la valeur effective de la portée d'effort tranchant (a_{eff}) peut être calculée selon :

$$a_{eff} \approx a - \frac{N}{V}\frac{z}{2} = a - \frac{N}{V}\frac{\left(d - \frac{x}{3}\right)}{2} \tag{2.10}$$

où N et V sont respectivement l'effort normal et l'effort tranchant agissant dans l'élément et z est le bras de levier flexionnel, qui peut être calculé en admettant un comportement élastique fissuré de la section de l'élément.

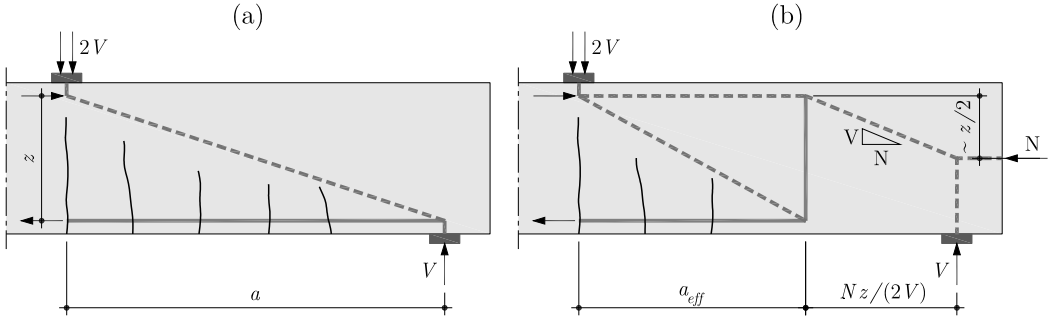


Fig. 2.12: Détermination de la longueur de la portée d'effort tranchant pour les éléments : **(a)** sans effort normal ; et **(b)** avec effort normal

Pour mieux saisir l'effet de l'effort normal sur le comportement des éléments en béton armé face aux ruptures d'effort tranchant, l'étude d'une série d'essais effectuée par Saqan et Frosch [Saq09] sur des éléments précontraints (avec des torons de précontrainte horizontaux) peut être faite [Fer09a]. La série d'essais est composée de neuf spécimens (figure 2.13(a)) avec une géométrie identique qui ont été soumis à une flexion trois points

(figure 2.13(b), avec une longueur de la portée d'effort tranchant $a = 2032$ mm) et qui ont développés des ruptures à l'effort tranchant (avec un début de plateau plastique pour certains spécimens).
Les paramètres étudiés dans cette campagne d'essais étaient le niveau de précontrainte (force de compression N_p) ainsi que les taux d'armature passive (ρ_s) et de précontrainte (ρ_p). Le tableau 2.3 résume les valeurs de ces paramètres ainsi que celles des principales caractéristiques des spécimens : l'épaisseur effective (b), les hauteurs statiques de l'armature passive et de la précontrainte (respectivement d_s et d_p), la hauteur statique moyenne pondérée (d_m, calculée selon l'équation 2.11), le rapport a/d_m, la contrainte initiale de précontrainte (σ_{p0}) ainsi que la résistance à la compression du béton (f_c). Des valeurs moyennes de la limite d'écoulement des armatures passives $f_{sy} = 496$ MPa et de l'acier de précontrainte $f_{py} = 1690$ MPa peuvent être admises selon les indications de Mirza et MacGregor [Mir79]. Tous les spécimens ont été fabriqués avec un diamètre maximal des granulats $d_g = 20$ mm et avaient une hauteur de la section $h = 711$ mm.

$$d_m = \frac{\rho_s \, b \, d_s \, f_{sy} + \rho_p \, b \, d_p \, (f_{py} - \sigma_{p0})}{\rho_s \, b \, f_{sy} + \rho_p \, b \, (f_{py} - \sigma_{p0})} \tag{2.11}$$

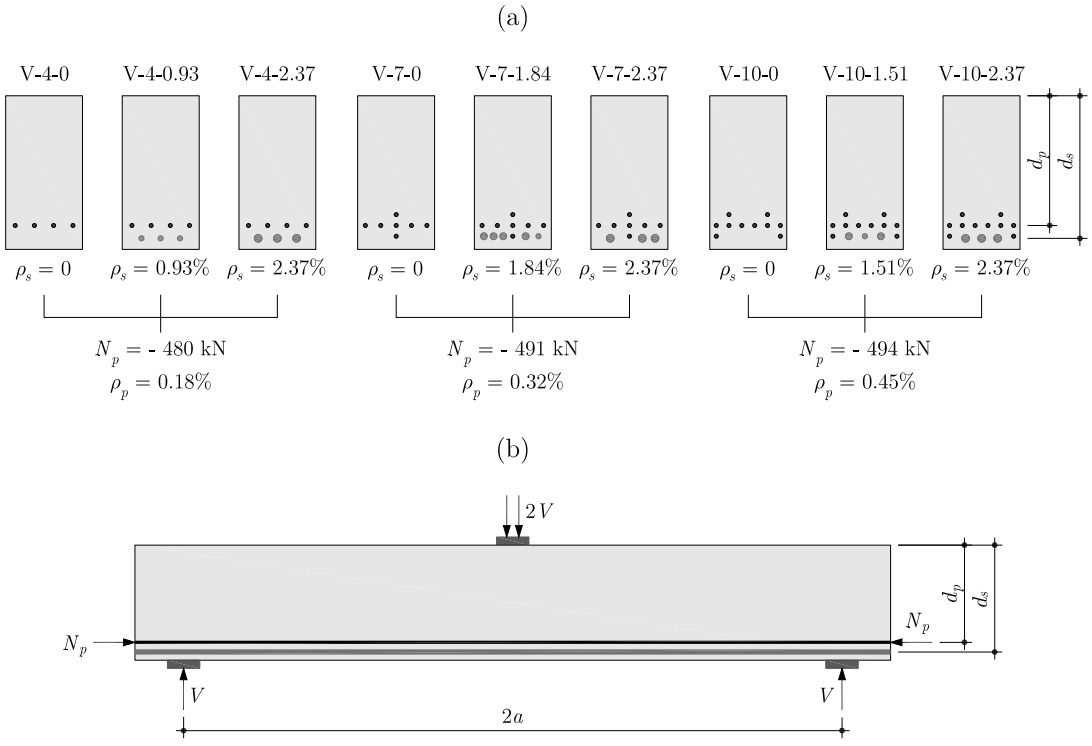


Fig. 2.13: Spécimens précontraints de la série d'essais effectuée par Saqan et Frosch [Saq09] : **(a)** caractéristiques de la section des spécimens ; et **(b)** bâti de charge utilisé

Comme montré par le tableau 2.3, le rapport a/d_m vaut environ 3.3 pour tous les spécimens. Même si étant proche du fond de la vallée de Kani (où un changement des modes

Tab. 2.3: Caractéristiques des spécimens précontraints de la série d'essais effectuée par Saqan et Frosch [Saq09]

spécimen	b [mm]	d_s [mm]	d_p [mm]	d_m [mm]	a/d_m [-]	ρ_s [%]	ρ_p [%]	N_p [kN]	σ_{p0} [Mpa]	f_c [Mpa]
V-4-0	362	-	610	610.0	3.33	0	0.181	-480	1200	52.1
V-4-0.93	368	671	610	646.8	3.14	0.243	0.178	-480	1200	52.7
V-4-2.37	373	660	610	649.7	3.13	0.620	0.176	-480	1200	53.4
V-7-0	359	-	610	610.0	3.33	0	0.320	-491	701	54.5
V-7-1.84	362	664	610	634.8	3.20	0.494	0.317	-491	701	53.1
V-7-2.37	356	660	610	636.1	3.19	0.650	0.322	-491	701	53.1
V-10-0	362	-	610	610.0	3.33	0	0.453	-494	494	51.7
V-10–1.51	362	663	610	625.2	3.25	0.406	0.453	-494	494	51.7
V-10-2.37	362	660	610	629.4	3.23	0.639	0.453	-494	494	51.7

a : mesurée sur cylindre

de rupture est observé, voir figure 2.5), un élancement de ce type place généralement les spécimens sur le flanc droit de la vallée, où les ruptures des éléments se caractérisent par le développement instable des fissures inclinées (voir section 2.2). Cependant, les résultats des essais indiquent que le développement des fissures inclinées ne s'est pas produit de manière instable. Ceci est mis en avant par le tableau 2.4 qui résume les charges de formation des fissures inclinées (V_{cr}) et les charges de rupture des éléments (V_R) et qui montre également leur rapport V_R/V_{cr}. Comme il peut être observé, un incrément important (incrément moyen de 38%) de la charge a été nécessaire pour obtenir la rupture des éléments après la formation des fissures inclinées. L'effort normal dû à la précontrainte (N_p) a donc provoqué un changement du mode de rupture, amenant à un développement stable des fissures inclinées [Fer09a]. Pour confirmer cette affirmation, les éléments ont été analysés par la méthode des EPSF (voir section 2.2.3) ainsi que par la théorie de la fissure critique (voir section 2.2.4).

Dans le cadre des calculs selon la théorie de la fissure critique, la présence de l'effort normal de précontrainte (N_p, avec une valeur négative, voir tableau 2.3) a due être considérée dans la détermination de la déformation longitudinale de la fibre de contrôle (ε). Comme dans le cas des éléments sans effort normal (voir section 2.2.4, figure 2.9(b)), le calcul de cette déformation peut être effectué en admettant un comportement élastique fissuré de la section de l'élément (figure 2.14(b)). Ainsi, en considérant l'effet de la précontrainte par des forces de remplacement (N_p et M_p), l'équilibre des forces horizontales peut être exprimé par :

$$N_p = C_{c,el} + \Delta T_{p,el} + T_{s,el} \tag{2.12}$$

et l'équilibre des moments par :

$$M + M_p = C_{c,el}\left(\frac{x}{3} - \frac{h}{2}\right) + \Delta T_{p,el}\left(d_p - \frac{h}{2}\right) + T_{s,el}\left(d_s - \frac{h}{2}\right) \tag{2.13}$$

où M est le moment de flexion agissant à l'endroit de la section de contrôle dû à l'action de l'effort tranchant V (figure 2.14, équation 2.15), M_p et le moment de flexion dû à

l'excentricité de la précontrainte par rapport à l'axe de la section de l'élément (figure 2.14, équation 2.16), $C_{c,el}$ est la force horizontale de compression agissante dans la zone comprimée, $T_{s,el}$ est la force de traction dans l'armature passive et $\Delta T_{p,el}$ est l'incrément de la force de traction dans l'armature de précontrainte. L'intensité de ces forces peut être calculée, en fonction de la courbure (χ), par :

$$\begin{aligned} C_{c,el} &= -\chi \frac{E_c\, b}{2} x^2 \qquad \text{valable si : } \chi\, E_c\, x \;\leq\; f_{cp} \\ T_{s,el} &= \chi\, E_s\, (d_s - x) \;\; \rho_s\, b\, d_s \;\leq\; \rho_s\, b\, d_s\, f_{yp} \\ \Delta T_{p,el} &= \chi\, E_p\, (d_p - x) \;\; \rho_p\, b\, d_p \;\leq\; \rho_p\, b\, d_p \;\; (f_{yp} - \sigma_{p0}) \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$M = V \left(a - \frac{d_m}{2} \right) \tag{2.15}$$

$$M_p = N_p \left(d_p - \frac{h}{2} \right) \tag{2.16}$$

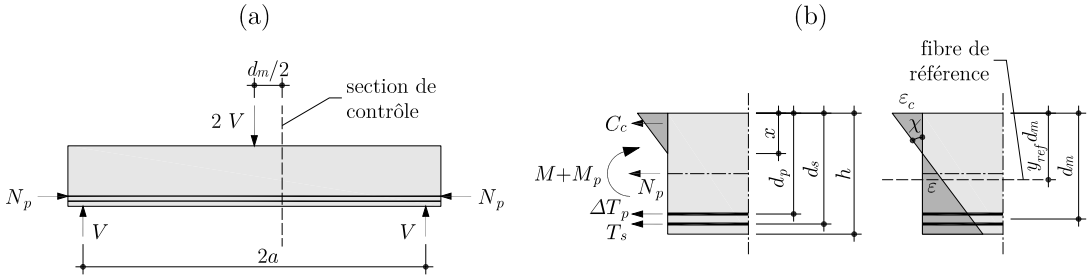


Fig. 2.14: Calcul de la résistance à l'effort tranchant selon les bases de la théorie de la fissure critique et en considérant la présence d'un effort normal de précontrainte : **(a)** position de la section de contrôle et de l'effort de précontrainte ; et **(b)** calcul élastique-fissuré de la déformation longitudinale de référence à l'endroit de la section de contrôle

Du fait de la présence de l'effort normal de précontrainte (N_p), le calcul de la section selon un comportement élastique fissuré est non-linéaire. Une fois la courbure (χ) déterminée, la déformation longitudinale de la fibre de référence (ε) peut être calculée par :

$$\varepsilon = \chi\, (y_{ref}\, d_m - x) \tag{2.17}$$

où $y_{ref} = 0.6$, et l'équation 2.9 peut être appliquée pour le calcul de la résistance à l'effort tranchant de l'élément ($V_{R,\mathrm{csct}}$). Il faut souligner que la valeur de cette force ($V_{R,\mathrm{csct}}$) peut être bornée par celle de la résistance à la flexion des éléments (V_{flex}). Cette dernière peut être obtenue par un calcul plastique, en considérant l'effet de la précontrainte par des forces de remplacement (N_p et M_p, voir équation 2.16). Ces différents calculs ont été effectués pour tous les spécimens sur la base des équations 2.1 à 2.21 (en admettant $E_s = 205$ GPa, $E_p = 196$ GPa et en calculant E_c selon l'équation 2.18 [Mut08a]). Les

résultats obtenus sont résumés dans le tableau 2.4.

$$E_c = 10000 \sqrt[3]{f_c} \tag{2.18}$$

$$V_{flex} = \frac{C_{c,pl}\left(\frac{x_{pl}}{2} - \frac{h}{2}\right) + T_{s,pl}\left(d_s - \frac{h}{2}\right) + \Delta T_{p,pl}\left(d_p - \frac{h}{2}\right) - M_p}{a} \tag{2.19}$$

$$C_{c,pl} = -x_{pl}\, f_{cp}\, b \quad ; \quad T_{s,pl} = f_{sy}\, \rho_s\, b\, d_s \quad ; \quad \Delta T_{p,pl} = (f_{py} - \sigma_{p0})\ \rho_p\, b\, d_p \tag{2.20}$$

$$x_{pl} = \frac{\Delta T_{p,pl} + T_{s,pl} - N_p}{f_{cp}\, b} \tag{2.21}$$

Un exemple (spécimen V-7-2.73) de la modélisation des éléments pour leur analyse avec la méthode des EPSF est présenté à la figure 2.15, qui met également en avant les résultats du calcul des champs de contraintes obtenus (tractions dans les armatures et compressions dans le béton), le champ des valeurs du coefficient η_ε, qui traduit la fissuration de l'élément, ainsi que le champ des niveaux de compression du béton ($\sigma_c / (\eta_\varepsilon\, f_{cp})$), représentant le degré de sollicitation du béton. Les résistances prédites avec la méthode des EPSF ($V_{R,\text{epsf}}$) sont également résumées dans le tableau 2.4.

Tab. 2.4: Comparaison entre les résistances de spécimens précontraints de la série d'essais effectuée par Saqan et Frosch [Saq09] et les résistances prédites avec la théorie de la fissure critique et avec la méthode des EPSF

spécimen	V_{cr}	V_R	$V_{R,\text{csct}}$	$V_{R,\text{epsf}}$	$\frac{V_R}{V_{cr}}$	$\frac{V_{R,\text{epsf}}}{V_{R,\text{csct}}}$	$\frac{V_{cr}}{V_{R,\text{csct}}}$	$\frac{V_R}{V_{R,\text{csct}}}$	$\frac{V_R}{V_{R,\text{epsf}}}$
	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[-]	[-]	[-]	[-]	[-]
V-4-0	205	244[a]	196[b]	204[b]	1.19	1.04	1.05	1.24	1.20
V-4-0.93	265	334[a]	251	300[b]	1.26	1.20	1.06	1.33	1.11
V-4-2.37	296	367	302	367	1.24	1.22	0.98	1.22	1.00
V-7-0	256	370	226	276	1.45	1.22	1.13	1.64	1.34
V-7-1.84	298	484	297	354	1.62	1.19	1.00	1.63	1.37
V-7-2.37	305	428	309	363	1.40	1.17	0.99	1.39	1.18
V-10-0	287	406	243	292	1.41	1.20	1.18	1.67	1.39
V-10–1.51	300	440	297	351	1.47	1.18	1.01	1.48	1.25
V-10-2.37	322	440	320	369	1.37	1.15	1.01	1.38	1.19
				moy	1.38	1.17	1.05	1.44	1.23
				CoV	0.10	0.05	0.07	0.12	0.10

a : rupture en présence d'un plateau plastique
b : prédiction de rupture plastique

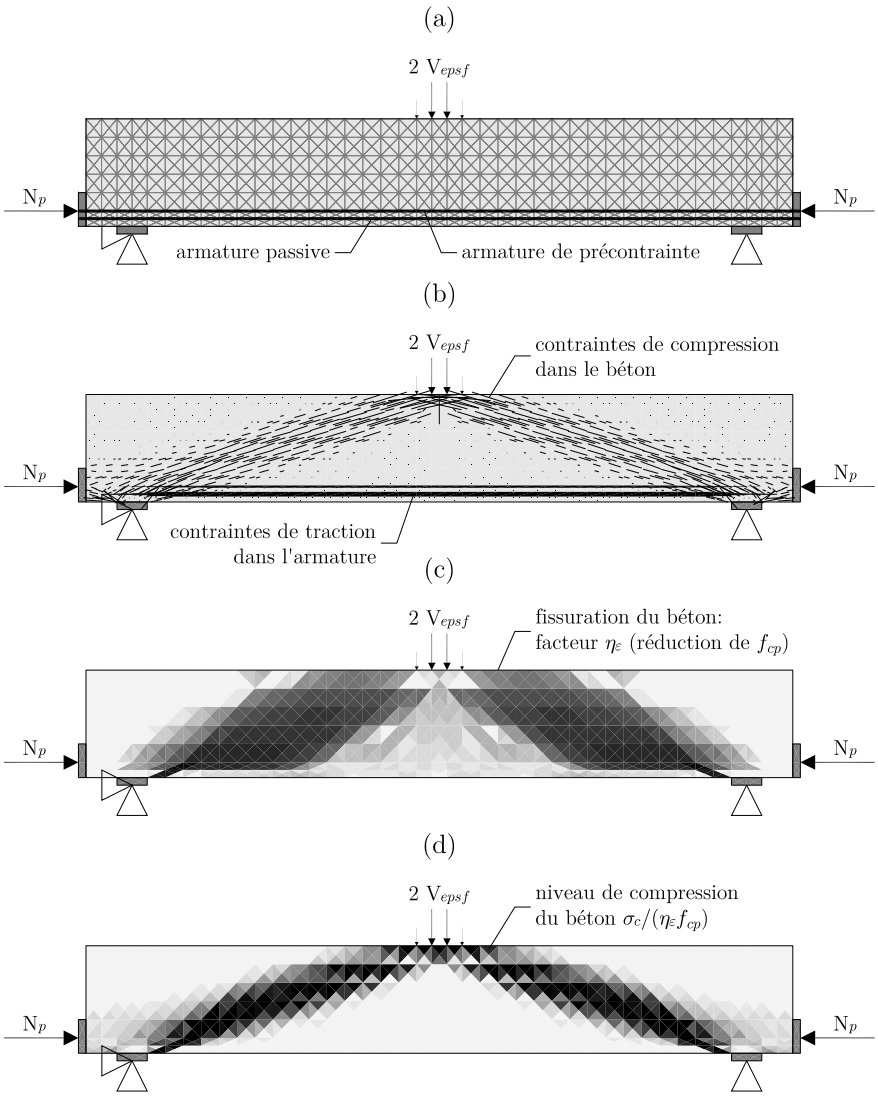


Fig. 2.15: Spécimens précontraints de la série d'essais effectuée par Saqan et Frosch [Saq09]. Exemple du calcul avec la méthode des EPSF (spécimen V-7-2.37) : **(a)** modélisation de l'élément ; **(b)** contraintes dans le béton et dans les armatures ; **(c)** champ des valeurs du coefficient η_ε (image de la fissuration du béton) ; et **(d)** niveau de compression du béton

L'analyse de résultats obtenus permet les considérations suivantes :

– les résistances prédites par la théorie de la fissure critique ($V_{R,\text{csct}}$) sont en très bonne corrélation avec les efforts correspondant à la formation de la fissuration inclinée (V_{cr}), avec une valeur moyenne des rapports $V_{cr}/V_{R,\text{csct}}$ égale à 1.05 et un coefficient de variation de 7%. Les calculs selon cette théorie sont par contre très conservatifs par rapport aux résistances des spécimens (V_R), avec une valeur moyenne des rapports $V_R/V_{R,\text{csct}}$ égale à 1.44 et un coefficient de variation de 12%. Ceci s'explique par le fait que selon la théorie de la fissure critique les ruptures des éléments interviennent au moment de la formation des fisssures inclinées, ce qui n'a pas été observé dans le cadre de ces essais (tableau 2.4).

– Les prédictions faites avec la théorie de la fissure critique pour les essais sans ou avec peu d'armature passive sont plutôt conservatives, ce qui peut sans doutes s'expliquer par les conditions particulières d'adhérence. Des résultats similaires, montrant des résistances particulièrement élevées en cas de réduction de l'adhérence acier-béton, ont également été obtenus par Leonhardt et Walther dans le cadre d'essais effectués sur des spécimens avec des armatures non-nervurées [Leo62, Mut08a].

– Un incrément significatif (incrément moyen de 17%) peut être observé entre les résistances prédites avec la méthode des EPSF ($V_{R,\text{epsf}}$) et celles prédites par la théorie de la fissure critique ($V_{R,\text{csct}}$). Les résistances des spécimens (V_R) sont donc en meilleur corrélation avec celles prédites par la méthode des EPSF ($V_{R,\text{epsf}}$), avec une valeur moyenne des rapports $V_R/V_{R,\text{epsf}}$ égale à 1.23 et un coefficient de variation de 10%. Toutefois, ces prédictions sont également plutôt conservatives, ce qui est logique car la méthode des EPSF néglige la résistance à la traction du béton (voir section 2.2.3).

– Malgré la valeur moyenne des rapports a/d_m égale à 3.3, les éléments se comportent plutôt comme ceux qui se trouvent sur le flanc gauche de la vallée de Kani, qui sont caractérisés par un développement stable des fissures inclinées. Ceci est mis en avant par la figure 2.16 qui montre la vallée de Kani calculée (pour le spécimen V-7-2.37) en tenant compte de l'effort normal de précontrainte (N_p, courbes continues). Comme apparaissant dans cette figure, ce spécimen se place effectivement sur le flanc gauche de la vallée. Cette figure montre également la vallée de Kani calculée sans la prise en compte de l'effort normal de précontrainte ($N = 0$, courbes trait-tillées). Une comparaison des deux vallées permet de comprendre l'effet de l'effort normal de précontrainte, qui peut être interpreté comme étant un décalage horizontal de la vallée (équation 2.10).

En conclusion, ces analyses ont montré que la résistance à l'effort tranchant des éléments doit être évaluée en tenant compte attentivement de la présence d'un effort normal. En particulier, l'effort normal peut induire à un changement du mode de rupture, car la longueur de la portée d'effort tranchant peut varier sensiblement (équation 2.10). Ceci est d'autant plus accentué pour les éléments précontraints, dans lesquels la valeur de l'effort normal peut être particulièrement importante.

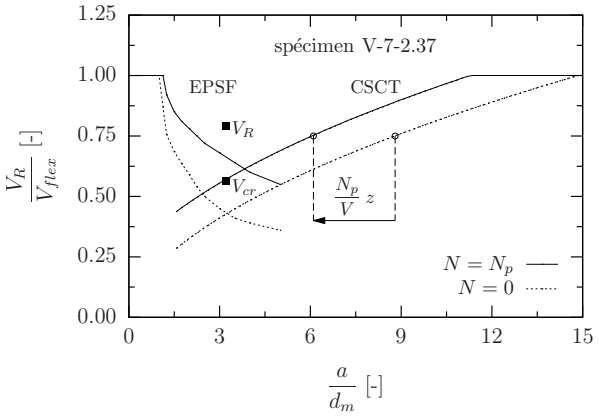


Fig. 2.16: Série d'essais effectuée par Saqan et Frosch [Saq09] : comparaison entre les résultats de l'essai V-7-2.37 et les prédictions de résistance obtenues avec la méthode des EPSF et la théorie de la fissure critique

2.3 Influence de l'armature transversale

Dans les éléments en béton armé soumis à des sollicitations d'effort tranchant, l'action de tous les modes de transmission de l'effort tranchant discutés dans la section 2.1 peut être renforcée par la présence d'une armature transversale. En effet, comme montré à la figure 2.17, les tirants inclinés sollicitant la partie à mi-hauteur des éléments à la traction et provoquant la fissuration inclinée (figure 2.3(b)) peuvent être remplacés par des étriers, qui offrent une résistance supérieure et permettent un meilleur contrôle de la fissuration. Par conséquent, la résistance des éléments peut augmenter sensiblement. De plus, leur capacité de déformation peut aussi être améliorée car l'armature transversale permet d'accepter une ouverture des fissures plus importante. En effet, dans le cas d'une ouverture importante de la fissure critique, la diminution de la capacité de transmission de l'effort tranchant par engrènement des granulats peut être compensée par l'action directe des étriers, qui évitent ainsi une perte soudaine de la résistance des éléments.

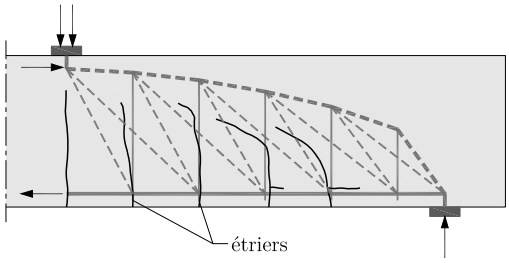


Fig. 2.17: Renforcement des modes de transmission de l'effort tranchant donné par la présence de l'armature transversale

En se référant à la vallée de Kani (figure 2.5), l'effet de l'armature transversale se traduit par une diminution de son étendue et de sa profondeur. L'amplitude des augmentations de résistance et de capacité de déformation des éléments dépend bien évidemment de la quantité d'armature transversale disposée. Pour un taux d'armature transversale impor-

tant, sa contribution devient déterminante vis-à-vis des autres modes de transmission de l'effort tranchant. Leur contribution ne peut par contre pas être négligée quand les éléments disposent d'une quantité modérée d'armature transversale. Une étude spécifique pour comprendre la contribution relative de chaque mode de transmission de l'effort tranchant dans la réponse des éléments avec un contenu modéré d'armature transversale constitue le chapitre 3.
La présence d'une armature transversale minimale dans les éléments en béton armé permet d'ailleurs de satisfaire pleinement aux conditions de base pour le développement des champs de contraintes (voir section 2.2.3). Dans ces cas, la méthode des EPSF se révèle alors pertinente. Cette méthode a été utilisée pour l'étude du comportement des zones nodales de cadres en béton armé soumises à une sollicitation d'ouverture. Le contenu de ce travail est présenté dans le chapitre 5 de cette thèse.

2.4 Conclusions

Dans ce chapitre, les caractéristiques des modes de transmission de l'effort de l'effort tranchant ont été analysées. Ensuite, différents modes de rupture ont été identifiés en relation à l'élancement des éléments. Suite à ce travail, les conclusions suivantes peuvent être faites :

1. Plusieurs modes de transmission de l'effort tranchant peuvent participer dans la réponse globale des éléments, à savoir : l'engrènement des granulats, l'effet goujon de l'armature flexionnelle, l'effet porte-à-faux, l'inclinaison de la bielle comprimée, la résistance résiduelle à la traction du béton et l'armature transversale (l'importance relative de chaque mode de transmission sera discutée dans le chapitre chapitre 3).

2. L'élancement des éléments a un rôle déterminant sur le type de rupture les affectant. En particulier, une plage d'élancements à l'intérieur de laquelle des ruptures d'effort tranchant peuvent se produire a été mise en évidence.

3. Les caractéristiques des modes de rupture peuvent se différencier en fonction de l'élancement, conduisant à un développement stable ou instable des fissures inclinées d'effort tranchant. Un élancement réduit des éléments donne lieu au développement stable d'un nombre de fissures inclinées pénétrant dans la bielle d'appui directe. Ce type de comportement peut être analysé, avec des résultats pertinents, par la méthode des EPSF [Fer07a]. Un élancement plus marqué des éléments donne par contre lieu au développement instable de l'ouverture d'une fissure critique, pouvant conduire à une rupture ayant un caractère particulièrement fragile. Ce type de comportement peut être analysé selon les bases de la théorie de la fissure critique [Mut08a].

4. La présence d'un effort normal sollicitant la section des éléments doit être considérée avec soin, car elle peut influencer sensiblement leur comportement ainsi que leur mode de rupture.

Chapitre 3

Modes de transmission de l'effort tranchant dans les éléments en béton armé

3.1 État de l'art et justification de l'étude

Les caractéristiques des différents modes de transmission de l'effort tranchant agissant dans le béton fissuré (désignés par la suite avec le terme MTET) ont été discutées dans le chapitre 2. Leur compréhension est un élément clé pour l'étude des ruptures à l'effort tranchant d'éléments en béton armé. Des recherches conduites par différents auteurs ont permis le développement de modèles physiques pour l'étude spécifique de chaque MTET. Ces modèles permettent généralement de mettre en relation l'intensité de la force transmise (localement ou dans un élément de structure) avec une cinématique supposée de la fissure. Un intéressant résumé des recherches et théories existantes jusqu'à la fin des années '70 a été édité par Walraven [Wal78]. Des travaux ont été effectués pour étudier l'engrènement des granulats [Tay70, Pau74a, Wal80, Mil84, Mil85, Dei87, Zar97, Ula03, Sag11], l'effet goujon [Kre66a, Kre66b, Tay69, Pau74b, Mil84, Mil85, Cha87, Dei92, Dei93, Jel99, Zar03], la résistance résiduelle du béton à la traction [Hil83, Kot83, Kot84, Kot86, Baz91, Hor92, Baz05a, Baz05b, Baz09] et la contribution de la zone comprimée au transfert de l'effort tranchant [Tur03].
Ces études ont pour la plupart été dédiées à la compréhension des principes physiques ainsi qu'à la définition des paramètres déterminants pour l'activation de chaque MTET. Seulement un nombre limité de recherches a été effectué afin de quantifier l'importance relative de chaque MTET dans la réponse globale des éléments en béton armé. Parmi les premières études dans ce sens, il faut souligner les travaux effectués dans les années '60 par Fenwick et Paulay [Fen68] qui ont investigués la contribution de différents MTET (engrènement des granulats, effet goujon, effet porte-à-faux [Kan64]). L'approche adoptée a été d'annuler les contributions de certains MTET afin d'isoler celle du mode de transmission étudié. En effet, la contribution de l'effet porte-à-faux a été étudiée sur des

spécimens pré-fissurés par la mise en place de feuilles d'acier au droit des pré-fissures (pour annuler l'engrènement des granulats) et par la mise en place d'une mousse autour des armatures flexionnelles (pour minimiser l'effet goujon) [Fen68]. La contribution de l'effet goujon a pu être étudiée avec des stratégies similaires par Krefeld et Thurston [Kre66a, Kre66b] et par Taylor [Tay69]. Ce dernier a également effectué des essais sur des spécimens où uniquement la contribution de l'engrènement des granulats était possible [Tay70].
Toutes les recherches énoncées précédemment ont permis d'améliorer les connaissances dans le domaine des ruptures à l'effort tranchant. Cependant, avec les stratégies adoptées pour isoler chaque MTET (pré-fissures, réduction de la rugosité des fissures, réduction de l'adhérence entre l'acier et le béton,...), le fonctionnement des spécimens d'essais risquait d'être sensiblement différent du comportement réel des éléments en béton armé. Pour ces raisons, une campagne d'essais (voir section 3.2) a été effectuée sur des éléments à grande échelle ($h = 400$ mm) sollicités à l'effort tranchant, avec l'objectif principal de quantifier l'importance relative de chaque MTET dans la réponse globale de l'élément. Pour permettre ce travail de quantification, des mesures raffinées ont été effectuées au cour des essais à la surface des spécimens (voir section 3.3). Ces mesures ont permis le suivi de la cinématique des fissures sur l'élément en béton armé avec une grande précision. La cinématique mesurée a ensuite été utilisée pour le calcul des efforts transmis de part et d'autre de la fissure critique d'effort tranchant, en se basant sur les principes des modèles physiques existants au sujet de chaque MTET (voir section 3.4). Ce travail a été fait pour trois essais, effectués sur des spécimens avec un faible taux d'armature transversale ($\rho_w = 0.063\%$). Cette valeur, inférieure à celle préscrite par les principales normes de construction en béton [Aci08, Eur04, Fib11, Sia03], a été principalement choisie pour garantir un processus de formation des fissures suffisamment stable et contrôlé pour effectuer des mesures raffinées de la cinématique des fissures (notamment de la fissure critique) à des niveaux de charge proches de la rupture. En effet, les spécimens sans armature transversale sont généralement caractérisés par le développement rapide et instable de la fissure critique d'effort tranchant [Mut08a, Fer09a], ne permettant généralement pas d'obtenir les mesures souhaitées. De plus, les spécimens avec un taux limité d'armature transversale montrent généralement la variabilité plus importante au niveau de la résistance, de la capacité de déformation et des caractéristiques de la fissure critique d'effort tranchant (forme, position, cinématique). La contribution des différents MTET peut donc varier sensiblement d'un essai à l'autre de telle sorte que la quantification de l'importance relative de chaque MTET est particulièrement intéressante.

3.2 Campagne d'essais

3.2.1 Spécimens de la série d'essais

La série d'essais se composait de quatre spécimens avec une section rectangulaire d'une hauteur $h = 400$ mm et une épaisseur $b = 300$ mm. Une description détaillée des proprié-

tés des spécimens et des résultats obtenus dans cette série d'essais peut être consultée dans le rapport d'essai [Ana09]. Les caractéristiques d'un spécimen type sont résumées à la figure 3.1. Deux spécimens, nommés SC12 et SC13, ont été fabriqués avec un béton de résistance normale (désigné par le terme NSC : normal strength concrete). Pour ces spécimens, la résistance moyenne à la compression du béton (f_{cm}, mesurée sur cylindre le jour de l'essai) était comprise entre 41.2 et 43.1 MPa. Deux autres spécimens, nommés SC16 et SC17, ont par contre été fabriqués avec un béton autoplaçant (désigné par le terme SCC : self compacting concrete). Ce béton présentait une résistance moyenne à la compression (f_{cm}) comprise entre 55.7 et 57.2 MPa. Pour les deux types de béton, le diamètre maximal des granulats était identique (d_g = 16 mm). Le tableau 3.1 montre également que la granulométrie des deux bétons était très similaire avec cependant un plus grand contenu de ciment dans le cas du béton autoplaçant. Le tableau 3.2 résume les caractéristiques principales des spécimens : l'épaisseur (b) et la hauteur (h) effectives de la section, la hauteur statique de l'armature flexionnelle (d), la valeur effective du taux d'armature flexionnelle (ρ) ainsi que le taux d'armature transversale (ρ_w). Le tableau 3.3 résume les propriétés principales des matériaux : le type de béton, le diamètre maximal des granulats (d_g), la résistances moyennes à la compression (f_{cm}) et à la traction (f_{ctm}) du béton ainsi que les limites d'écoulement de l'armature flexionnelle (f_y) et de l'armature transversale (f_{yw}). Deux différents taux d'armature flexionnelle (ρ) ont été utilisés dont la valeur nominale était $\rho = 1.53\%$ (obtenu avec trois barres de diamètre 26 mm) pour les spécimens SC12 et SC16 et $\rho = 1.09\%$ (obtenu avec trois barres de diamètre 22 mm) pour les spécimens SC13 et SC17. Par simplicité, dans la suite du chapitre, les références aux spécimens seront faites en utilisant la valeur nominale de leur taux d'armature flexionnelle ($\rho = 1.53\%$ et 1.09%).

Tab. 3.1: Composition d'un mètre cube des bétons utilisés pour la série d'essais

composant	densité	béton normal (NSC)		béton autoplaçant (SCC)	
		poids	volume	poids	volume
	[kg/m^3]	[kg]	[m^3]	[kg]	[m^3]
eau	1000	123	0.123	196	0.196
ciment	2800	326	0.116	450	0.161
sable (0-4 mm)	2600	894	0.344	877	0.337
gravier fin (4-8 mm)	2600	430	0.165	351	0.135
gravier (8-16 mm)	2600	627	0.241	526	0.202
		p_k =0.76[a]		p_k =0.65[a]	

a : p_k est le rapport entre le volume des granulats et le volume total de béton (voir section 3.4.2)

Deux essais ont été effectués sur chaque spécimen : la première rupture (indiquée par l'indice a) a été obtenue sur le côté du spécimen sans armature transversale et la deuxième (indiquée par l'indice b) sur le côté avec un taux d'armature transversale $\rho_w = 0.063\%$ (figure 3.1). Après la première rupture, le côté endommagé du spécimen a été réparé pour permettre l'éxécution du deuxième essai. Ceci a été réalisé avec un système de plaques métalliques et de tiges précontraintes, permettant de refermer quasi complétement les fissures apparues lors du premier essai [Ana09]. L'armature transversale était composée

Tab. 3.2: Caractéristiques des spécimens de la série d'essais

spécimen	béton	b [mm]	h [mm]	d [mm]	ρ^{a} [%]	essai	ρ_w [%]
SC12	NSC	302	405	354	1.51	SC12a	-
						SC12b	0.063
SC13	NSC	303	403	354	1.07	SC13a	-
						SC13b	0.063
SC16	SCC	302	402	346	1.53	SC16a	-
						SC16b	0.063
SC17	SCC	304	404	350	1.09	SC17a	-
						SC17b	0.063

a : valeur effective

Tab. 3.3: Caractéristiques des matériaux de la série d'essais

spécimen	béton	d_g [mm]	$f_{ctm}{}^{a}$ [Mpa]	f_y [Mpa]	essai	$f_{cm}{}^{b}$ [Mpa]	$f_{yw}{}^{c}$ [Mpa]
SC12	NSC	16	2.93	580	SC12a	41.2	-
					SC12b	41.5	497
SC13	NSC	16	2.93	580	SC13a	43.0	-
					SC13b	43.1	497
SC16	SCC	16	3.17	580	SC16a	55.7	-
					SC16b	56.0	497
SC17	SCC	16	3.17	580	SC17a	56.7	-
					SC17b	57.2	497

a : mesurée sur cylindre à l'âge de 28 jours
b : mesurée sur cylindre le jour de l'essai
c : acier écrouis à froid (limite d'écoulement définie comme celle pour laquelle la déformation plastique résiduelle, suite à une décharge élastique, est égale à 0.2%).

d'épingles de diamètre 6 mm placées tous les 150 mm (chaque épingle donnant lieu à une section d'armature transversale au centre de la section du spécimen, voir figure 3.1). Les épingles, en forme de C, étaient ancrées aux armatures longitudinales supérieures (armature comprimée) et inférieures (armature flexionnelle). La direction des zones d'ancrage horizontales de deux épingles succéssives était alternée afin de garantir une géométrie symétrique des spécimens.
Comme montré à la figure 3.1, les spécimens étaient soumis à une flexion trois points, avec une longueur de la travée $L = 2440$ mm. La charge ponctuelle $Q = 2\,V$ (V étant l'effort tranchant à transmettre à chaque appui) était appliquée au centre de la travée, qui était le point fixe horizontal du banc d'essai. Les dimensions de la plaque métallique de chargement placée sous le vérin hydraulique étaient de 300 x 80 x 25 mm. Les plaques d'appuis, permettant les rotations et les déplacements horizontaux des spécimens, avaient des dimensions de 300 x 200 x 40 mm. Le rapport entre la longueur de la portée d'effort tranchant ($a = L/2 = 1220$ mm) et la hauteur statique nominale de l'armature flexionnelle ($d_{nom} \approx 348$ mm) était égal à 3.51 pour tous les spécimens.

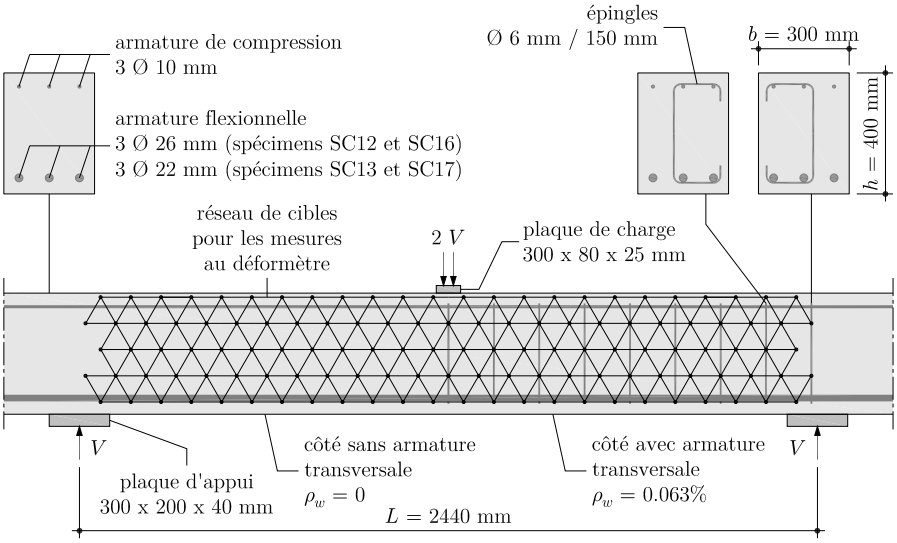


Fig. 3.1: Caractéristiques d'un spécimen type investigué : géométrie, détail d'armature, principes du banc d'essai et réseau pour les mesures au déformètre

3.2.2 Discussion des résultats

Les figures 3.2(a-d) montrent les résultats des huit essais effectués sur les quatre spécimens. Pour chaque spécimen, deux courbes montrant la relation entre l'effort tranchant appliqué (V) et la déformation verticale mesurée à mi-travée (δ_v) sont présentées : la courbe trait-tillée concerne l'essai effectué sur le côté sans armature transversale et la courbe continue celui effectué du côté renforcé avec un taux d'armature transversale $\rho_w = 0.063\%$. Les figures 3.2(e-f) résument respectivement les résultats des essais sans et avec armature tranversale. Les résistances (V_{max}) et le résistance normalisées ($V^*_{max} = V_{max}/\left(b\,d\,\sqrt{f_{cm}}\right)$) obtenues sont résumées dans le tableau 3.4. Ce tableau indique également, pour chaque spécimen, le rapport $V^*_{max,b}/V^*_{max,a}$ entre la résistance obtenue du côté avec ($V^*_{max,b}$) et du côté sans ($V^*_{max,a}$) armature transversale, ainsi que le rapport $V^*_{max,\mathrm{NSC}}/V^*_{max,\mathrm{SCC}}$ entre les résistances des spécimens fabriqués avec un béton normal ($V^*_{max,\mathrm{NSC}}$) et celles des spécimens fabriqués avec un béton autoplaçant ($V^*_{max,\mathrm{SCC}}$) ayant les mêmes taux d'armature flexionnelle et transversale. Les déformations verticales maximales ($\delta_{v,max}$) mesurées avant les ruptures ainsi que les rapports $\delta_{v,max,b}/\delta_{v,max,a}$ entre les déformations verticales mesurées du côté avec ($\delta_{v,max,b}$) et du côté sans ($\delta_{v,max,a}$) armature transversale sont aussi résumés dans le tableau 3.4. De plus, les figures 3.3 et 3.4 montrent la cinématique mesurée de toutes les fissures respectivement lors du premier essai (sans armature transversale) et lors du deuxième essai (avec armature transversale). Enfin la figure 3.6 montre les états de fissuration observés à la rupture des spécimens.

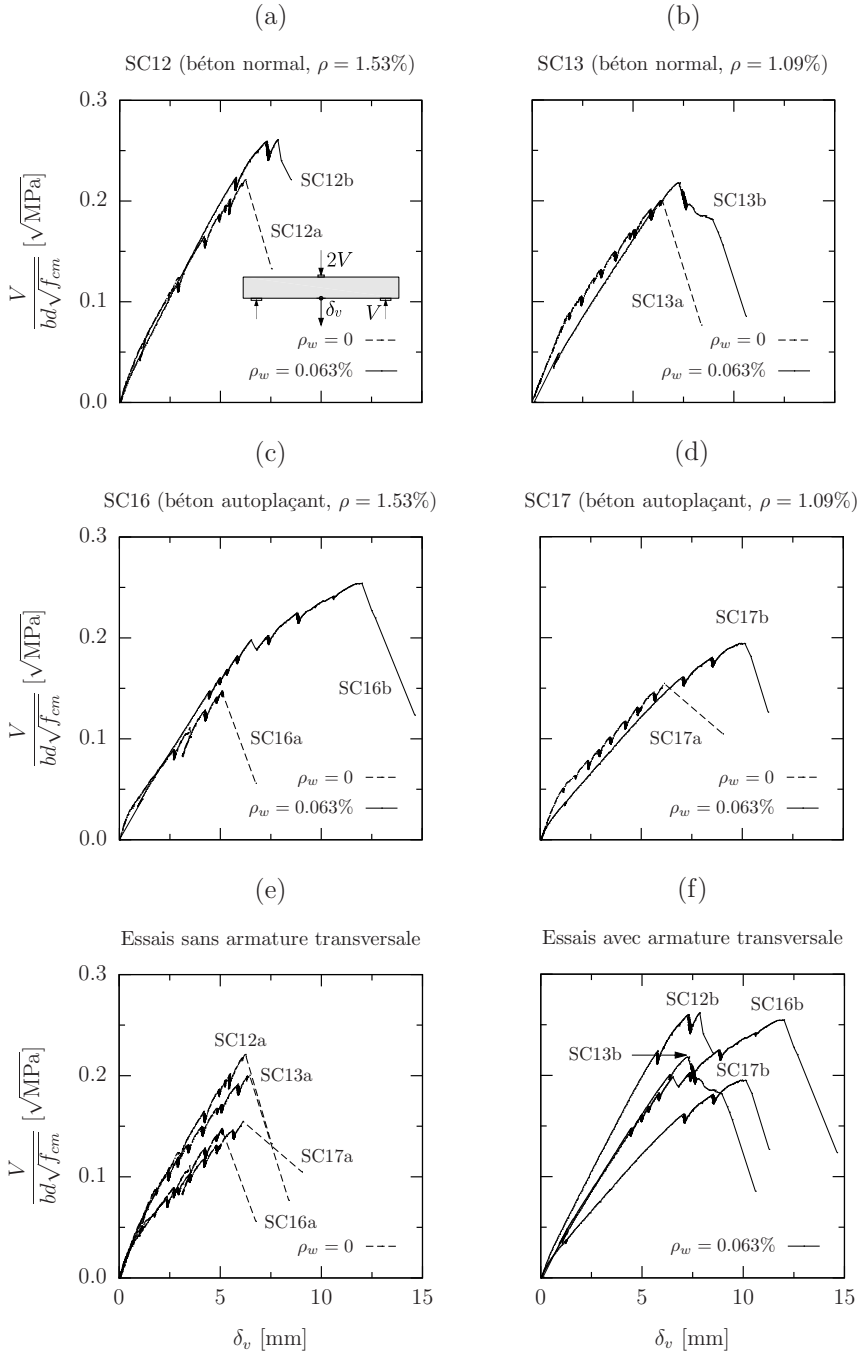


Fig. 3.2: Résultats de la série d'essais. Relations entre l'effort tranchant appliqué et la déformation verticale mesurée à mi-travée pour : **(a)** le spécimen SC12 ; **(b)** le spécimen SC13 ; **(c)** le spécimen SC16 ; **(d)** le spécimen SC17 ; **(e)** les essais sans armature transversale ; et **(f)** les essais avec armature transversale

Tab. 3.4: Résultats de la série d'essais

béton	ρ [%]	essai	ρ_w [%]	V_{max} [kN]	V^*_{max} [a] $[\sqrt{\text{Mpa}}]$	$\frac{V^*_{max,\text{NSC}}}{V^*_{max,\text{SCC}}}$ [-]	$\frac{V^*_{max,b}}{V^*_{max,a}}$ [-]	$\delta_{v,max}$ [mm]	$\frac{\delta_{v,max,b}}{\delta_{v,max,a}}$ [-]
NSC	1.53	SC12a	-	148	0.189	1.49	-	6.2	-
		SC12b	0.063	176	0.223	1.02	1.18	7.9	1.27
NSC	1.09	SC13a	-	137	0.171	1.25	-	6.5	-
		SC13b	0.063	150	0.187	1.13	1.09	7.3	1.12
SCC	1.53	SC16a	-	115	0.127	-	-	5.1	-
		SC16b	0.063	199	0.219	-	1.72	12	2.35
SCC	1.09	SC17a	-	127	0.137	-	-	6.4	-
		SC17b	0.063	153	0.165	-	1.20	10.1	1.58

a : $V^*_{max} = \dfrac{V_{max}}{b\,d\,\sqrt{f_{cm}}}$

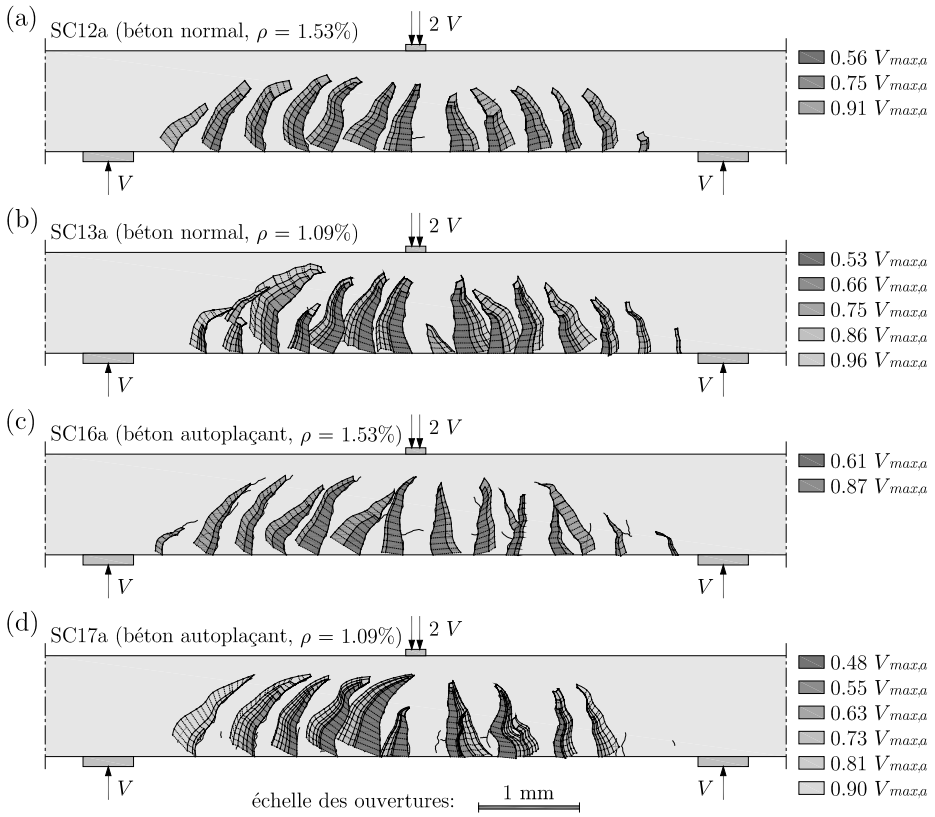


Fig. 3.3: Résultats de la série d'essais. Cinématique des fissures mesurée pour les essais sans armature transversale : **(a)** essai SC12a ; **(b)** essai SC13a ; **(c)** essai SC16a ; et **(d)** essai SC17a

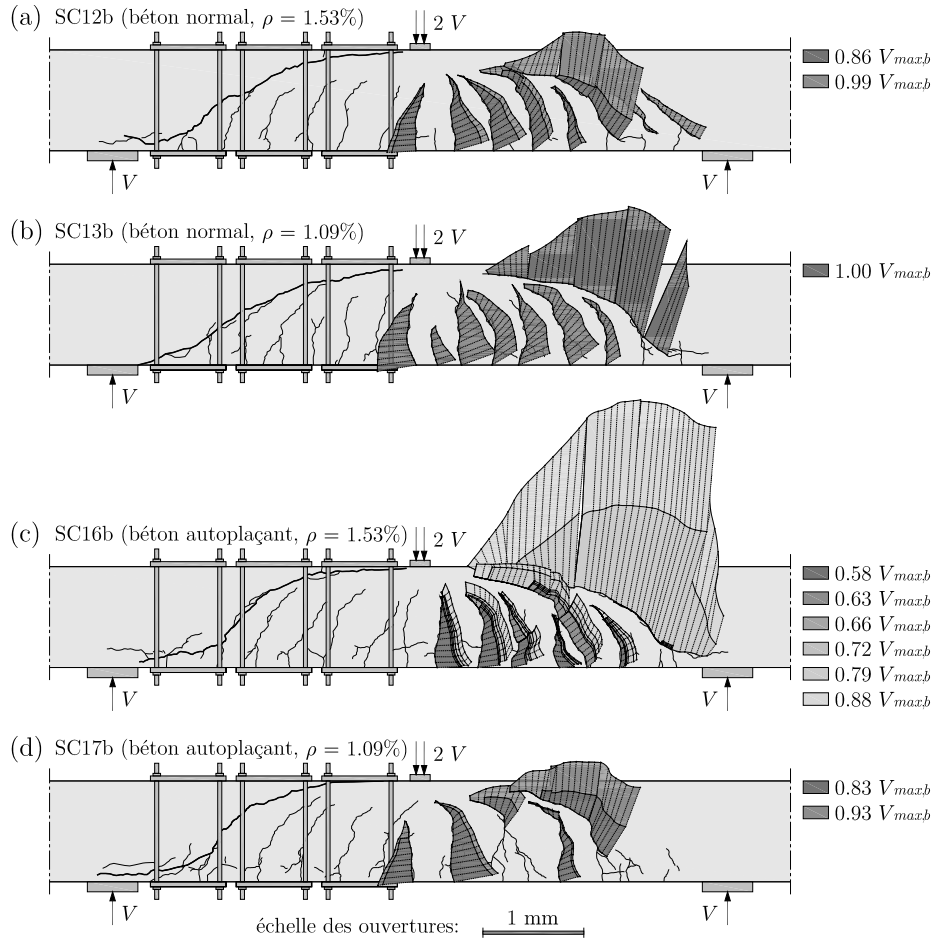


Fig. 3.4: Résultats de la série d'essais. Cinématique des fissures mesurée pour les essais avec armature transversale : **(a)** essai SC12b ; **(b)** essai SC13b ; **(c)** essai SC16b ; et **(d)** essai SC17b

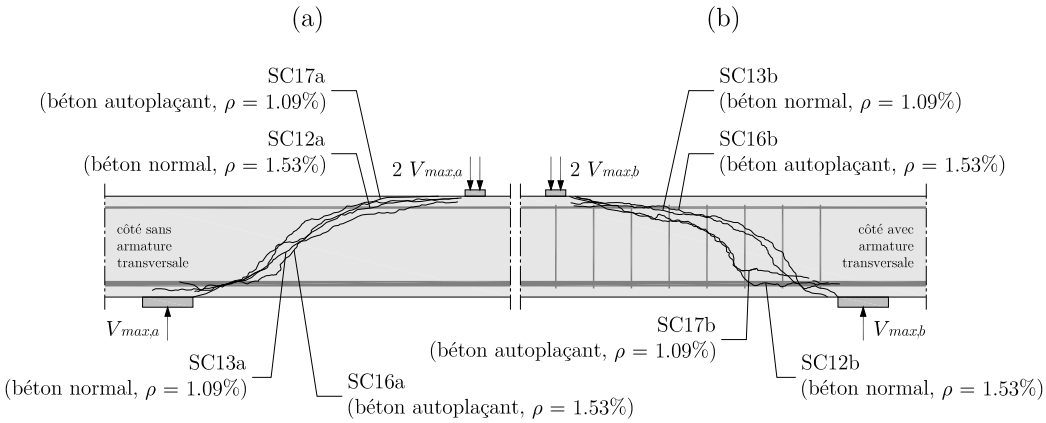


Fig. 3.5: Résultats de la série d'essais. Allure des fissures critiques observées pour : **(a)** les essais sans armature transversale ; et **(b)** les essais avec armature transversale

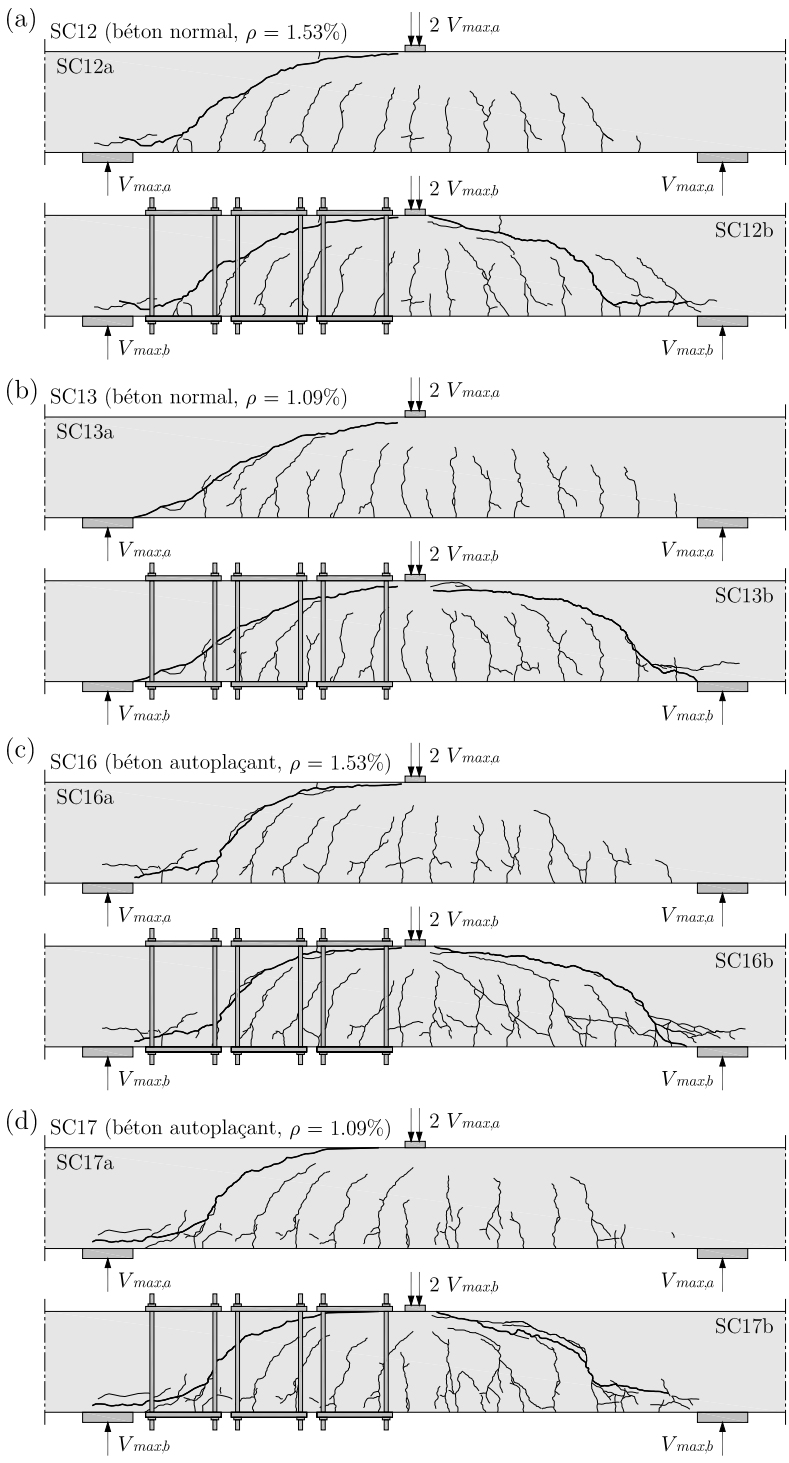


Fig. 3.6: Résultats de la série d'essais. États de fissuration observés à la rupture des spécimens : **(a)** SC12 ; **(b)** SC13 ; **(c)** SC16 ; et **(d)** SC17

Sur la base des résultats obtenus, les considérations suivantes peuvent être faites :

- dans le cas des essais sans armature transversale (figure 3.2(e)), les résistances normalisées obtenues par les spécimens fabriqués avec un béton normal ($V^*_{max,\mathrm{NSC}}$, essais SC12a et SC13a) sont plus importantes que celles obtenues par les spécimens fabriqués avec un béton autoplaçant ($V^*_{max,\mathrm{SCC}}$, essais SC16a et SC17a). Ceci a été observée pour toutes les deux valeurs du taux d'armature flexionnelle (avec un incrément de 49% pour le taux d'armature $\rho = 1.53\%$ et de 25% pour le taux d'armature $\rho = 1.09\%$, voir tableau 3.4). Cette tendance est par contre beaucoup moins marquée (2% pour $\rho = 1.53\%$ et 13% pour $\rho = 1.09\%$, voir tableau 3.4) dans le cas des essais avec une armature transversale (figure 3.2(f)). Dans ce cas, les résultats semblent d'avantage influencés par le taux d'armature flexionnelle que par le type de béton. En effet, la figure 3.2(f) montre une résistance plus élevée pour les essais SC12b et SC16b ($\rho = 1.53\%$) en comparaison respectivement aux essais SC13b et SC17b ($\rho = 1.09\%$).
- En ce qui concerne l'augmentation de résistance offerte par la présence de l'armature transversale, une variabilité importante des résultats a été observée (figures 3.2(a-d) et tableau 3.4). Des incréments de résistance de 18%, 9% et 20% ont été observés respectivement pour les spécimens SC12, SC13 et SC17. Les bénéfices les plus importants ont été mesurés pour le spécimen SC16, pour lequel l'essai avec armature transversale (SC16b) a montré un incrément de résistance de 72% par rapport à celui sans ces armatures (SC16a). Il faut toutefois souligner que l'essai SC16a a montré une résistance particulièrement réduite, en comparaison à l'essai SC12a (avec le même taux d'armature) mais également par rapport à l'essai SC17a (avec un taux d'armature inférieur). Ceci a probablement contribué à cette augmentation spectaculaire de résistance observée par l'ajout d'armature transversale.
- La présence des armatures transversales a aussi été bénéfique en ce qui concerne la capacité de déformation des spécimens (pouvant être appréciée par l'amplitude de la déformation verticale δ_v avant la rupture, voir figures 3.2(a-d) et tableau 3.4). Une grande variabilité a toutefois été observée concernant l'importance de ces bénéfices. En effet, une augmentation réduite de la capacité de déformation a été observée pour les spécimens fabriqués avec un béton normal (27% pour le spécimen SC12 et 12% pour le spécimen SC13). La présence d'une armature transversale a par contre été très bénéfique pour les spécimens fabriqués avec un béton autoplaçant (135% pour le spécimen SC16 et de 58% pour le spécimen SC17), pour lesquels l'incrément de résistance a également été marqué.
- La figure 3.3 montre que les tendances attendues au sujet du taux d'armature flexionnelle (ρ) ont été observées. En effet, il apparaît logiquement que l'ouverture des fissures est globalement plus importante pour les essais avec un taux d'armature inférieur (SC13a et SC17a, en comparaison aux essais SC12a et SC16a).
- Dans le cas des essais avec armature transversale (figure 3.2(f)), un changement de rigidité a généralement été observé pour un niveau de charge supérieur à la charge de

rupture ($V_{max,a}$) de l'essai correspondant sans armature transversale (figure 3.2(e)). Ce point, à partir duquel la réponse de l'élément est moins rigide, traduit une forte augmentation des déformations localisées au droit de la fissure critique d'effort tranchant, dont la cinématique est présentée aux figures 3.4(a-d) pour l'ensemble des spécimens. Cette augmentation de l'ouverture des fissures critiques, a influencé de manière conséquente les rotations et les déformations verticales des spécimens. Le changement de rigidité est particulièrement évident dans le cas des essais SC13b (avec une perte de charge conséquente) et SC16b. Les fissures critiques observées dans ces deux essais présentent une forme plutôt allongée (traversant plusieurs armatures transversales), associée à des ouvertures particulièrement importantes (figures 3.4(b-c)), en comparaison à celles observées dans les essais SC12b et SC17b (figures 3.4(a,d)). La présence de l'armature transversale dans ces deux spécimens a probablement joué un rôle particulièrement important pour éviter une perte soudaine et totale de leur résistance.

La figure 3.6 montre que la totalité des fissures critiques s'est développée sur l'entier de la longueur de la portée d'effort tranchant (distance entre la mi-travée et l'appui). Toutes les fissures sont caractérisées par trois branches distinctes : deux branches de délamination plutôt horizontales (l'une au niveau de l'armature flexionnelle et l'autre au niveau de la zone comprimée) et une branche inclinée au niveau de la partie à mi-hauteur du spécimen. Par la suite, le terme "allure" sera utilisé pour définir la forme de la fissure critique sur toute sa longueur de développement (comprenant les deux branches de délamination et la branche inclinée). La figure 3.5 permet une comparaison de l'allure des fissures critiques. Dans les cas des essais sans armature transversale (figure 3.5(a)), l'allure des fissures est très similaire. Au contraire, deux différentes allures des fissures ont pu être observées dans les essais avec armature transversale (figure 3.5(b)). La première a été observée pour les essais SC13b (béton normal, $\rho = 1.09\%$) et SC16b (béton autoplaçant, $\rho = 1.53\%$), qui montrent une fissure critique dont la longueur de la branche de délamination au niveau de l'armature flexionnelle est très courte. Dans ces cas, la branche inclinée centrale se développe assez proche de l'appui et sur une longueur plus importante (branche inclineé plus allongée). La deuxième allure a été observée pour les essais SC12b (béton normal, $\rho = 1.53\%$) et SC17b (béton autoplaçant, $\rho = 1.09\%$). Ces essais montrent une fissure critique dont la longueur de la branche horizontale de délamination au niveau de l'armature flexionnelle est plus importante et dont la branche inclinée centrale se développe plus loin de l'appui et sur une longueur plus courte. Des changements de pente plus abrupts entre la branche inclinée (qui est legèrement plus raide que celle observée dans la première allure) et les branches horizontales sont ainsi observés.

En général, la position des branches inclinées centrales semble être influencée par la position de l'armature transversale (deuxième ou trosième épingle à partir du bord de l'appui respectivement pour la première et la deuxième allure, voir figure 3.5(b)). De plus, la partie plus raide de chaque fissure critique se concentre entre deux épingles successives.

Concernant ces deux allures possibles pour la fissure critique (figure 3.5(b)), elles ne

semblent ni être influencées par le type de béton ni par le taux d'armature flexionnelle, mais semblent plutôt se produire de manière aléatoire. La contribution de chaque MTET est donc probablement très variable d'un essai à l'autre. En raison de cette variabilité, le travail de quantification de l'importance relative de chaque MTET (voir section 3.4) prend donc tout son sens pour les spécimens SC12b, SC13b, SC16b et SC17b.

3.3 Mesures de la cinématique des fissures

Des mesures discontinues permettant le suivi de la cinématique des fissures ont été effectuées sur la surface de chaque spécimen au cour de chaque essai. Ces mesures, pour lesquelles d'avantage d'informations sont à disposition ailleurs [Cam11c], ont été effectuées manuellement en utilisant un déformètre de haute précision permettant de définir la distance entre deux cibles. Un réseau de cibles formant une maille de triangles équilatéraux (longueur nominale des côtés de 100 mm) a été disposé sur les spécimens de façon a couvrir toute la surface possible de développement des fissures (figure 3.1). Au cour de chaque essai, des mesures ont été effectuées à des paliers de charge sélectionnés. Le chargement a dû être provisoirement interrompu afin d'en permettre l'exécution en état de déformation stable. Entre trois et six paliers de charge ont donc été effectués dans le cadre des essais sans armature transversale tandis qu'un nombre généralement inférieur a été entrepris pour les essais avec armature transversale. En effet, dans le cas de ces essais, le premier palier a été directement effectué à un niveau de charge correspondant à la charge de rupture ($V_{max,a}$) du côte du spécimen sans armature transversale.
Les mesures effectuées avec le déformètre sont essentielles pour le travail de quantification de la contribution de chaque MTET (voir section 3.4) et permettent de calculer l'ouverture (w, mesurée le long de l'axe y' perpendiculaire à la fissure) et le glissement (Δ, mesuré le long de l'axe x' parallèle à la fissure) de la fissure en un point donné (voir annexe A). Les valeurs obtenues seront ensuite utilisées pour le calcul de la contribution de chaque MTET.
Afin d'augmenter la qualité des mesures, une série de dix lectures était faite pour chaque tronçon de mesure (en un laps de temps d'environ 1 seconde) et leur écart type était calculé. La mesure était acceptée pour un écart type inférieur à 0.002 mm (base de mesure de 100 mm). Un système de correction basé sur la redondance des mesures a été également mis en place [Cam11c] et prévoyait le contrôle de l'équilibre d'un treillis en reproduisant le réseau triangulaire de cibles collées sur le spécimen. Les mesures effectuées étaient alors introduites comme des déformations imposées dans chaque barre du treillis d'un modèle d'éléments finis. Ce système de contrôle permettait d'une part d'identifier les erreurs grossières de mesure au cour de l'essai (permettant ainsi de refaire instantanément les mesures erronées) et d'autre part d'obtenir un ensemble de mesures parfaitement consistantes entre-elles.

3.4 Analyse des modes de transmission de l'effort tranchant

3.4.1 Description du corps rigide étudié

Dans la suite, les essais effectués du côté des spécimens avec armature transversale seront analysés en détail afin de quantifier la contribution de chaque MTET. Cette étude sera faite en considérant un corps rigide défini par la fissure critique d'effort tranchant (figure 3.9), pour lequel la pertinence sera discutée plus loin. Un corps rigide idéalisé est montré à la figure 3.7, qui montre également toutes les forces horizontales et verticales qui peuvent potentiellement agir sur celui-ci. L'intensité et la position de chacune de ces forces dépendra de la forme réelle de la fissure critique, qui défini le corps rigide, ainsi que de sa cinématique. Comme montré à la figure 3.7, plusieurs modes de transmission peuvent participer au transfert de l'effort tranchant d'une part et d'autre de la fissure critique :

- la composante verticale (V_{agg}) de l'engrènement des granulats le long de la fissure critique (voir section 3.4.2)
- la somme (V_{sw}) des forces ($V_{sw,n}$) transmises par chaque épingle qui est traversée par la fissure critique (voir section 3.4.3)
- la composante verticale (V_{res}) de la force transmise par la résistance résiduelle du béton à la traction où l'ouverture de la fissure critique est limitée (voir section 3.4.4)
- la force (V_{dow}) transmise par effet goujon des armatures flexionnelles (voir section 3.4.5)
- la composante verticale (V_{ch}) de l'effort agissant dans la bielle de compression inclinée (voir section 3.4.6)

Une série de forces horizontales doit aussi être considérée dans l'équilibre du corps rigide (figure 3.7) :

- la force de traction (N_s) agissante au niveau de l'armature flexionnelle (voir équation 3.3)
- la composante horizontale (N_{agg}) de l'engrènement des granulats le long de la fissure critique (voir section 3.4.2)
- la composante horizontale (N_{res}) de la force transmise par la résistance résiduelle du béton à la traction où l'ouverture de la fissure critique est limitée (voir section 3.4.4)
- la composante horizontale (N_{ch}) de l'effort agissant dans la bielle de compression inclinée (voir section 3.4.6 et équation 3.4)

Du fait de leur rigidité négligeable, les efforts verticaux générés par effet goujon des armatures comprimées et ceux horizontaux générés par effet goujon des armatures transversales ne sont pas considérés dans la suite. La force de compression dans les armatures

comprimées est également négligée.
L'effort tranchant total (V_{tot}) qui est transmis à travers la fissure critique est donc calculé selon l'équation 3.1. Sa valeur doit en principe correspondre à l'effort tranchant (V_p) agissant dans le spécimen au moment où le dernier palier de mesures de la cinématique de la fissure critique a été effectué. La qualité des résultats du travail de quantification des contributions des MTET peut donc être appréciée par le rapport V_{tot}/V_p.

$$V_{tot} = -\left(V_{agg} + V_{sw} + V_{res} + V_{dow} + V_{ch}\right) \tag{3.1}$$

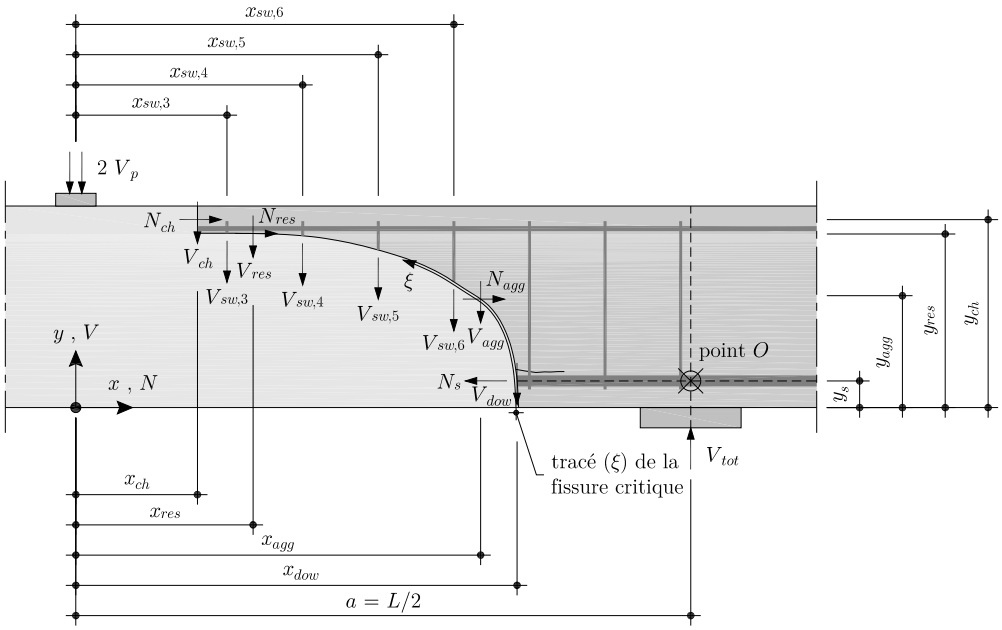


Fig. 3.7: Définition des forces agissant sur le corps rigide défini par la fissure critique

La quantification des efforts agissant sur le corps rigide de la figure 3.7 est possible par le calcul des forces d'engrènement (N_{agg} et V_{agg}), des forces dans les épingles ($V_{sw,n}$), des forces de la résistance résiduelle à la traction (N_{res} et V_{res}) et de la force d'effet goujon (V_{dow}). La quantification de ces différentes forces se base entièrement sur les mesures de la cinématique de la fissure critique ainsi que sur l'utilisation des modèles physiques existants pour l'étude de chaque MTET. Dés la détermination de ces premières contributions, les forces horizontales N_{ch} et N_s nécessaires pour garantir l'équilibre du corps rigide peuvent ensuite être calculées. Les relations d'équilibre sont décrites aux équations 3.2 à 3.4.

$$\sum \uparrow = 0: \quad V_{tot} + V_{agg} + V_{sw} + V_{res} + V_{dow} + V_{ch} = 0 \tag{3.2}$$

$$\sum \rightarrow = 0: \quad N_s + N_{agg} + N_{res} + N_{ch} = 0 \tag{3.3}$$

$$\sum \curvearrowright_{(O)} = 0: \quad V_{agg}\,(a - x_{agg}) + \sum_{n=1}^{9} V_{sw,n}\,(a - x_{sw,n}) + V_{res}\,(a - x_{res}) + V_{dow}\,(a - x_{dow}) + V_{ch}\,(a - x_{ch}) + N_{agg}\,(y_{agg} - y_s) + N_{res}\,(y_{res} - y_s) + N_{ch}\,(y_{ch} - y_s) = 0 \tag{3.4}$$

L'équilibre des moments (équation 3.4), calculé autour du point O (figure 3.7), permet la détermination de la force N_{ch}. L'équilibre des forces horizontales (équation 3.3) permet ensuite d'obtenir l'intensité de la force N_s. Connaissant l'intensité de la force horizontale agissante dans la bielle de compression inclinée (N_{ch}) ainsi que l'inclinaison de cette bielle (α_{ch}), il est possible de quantifier l'intensité de la dernière force verticale (V_{ch}) selon l'équation 3.5. Si une inclinaison $\alpha_{ch} \neq 0°$ de la bielle de compression est considérée, un calcul itératif est alors nécessaire afin de satisfaire l'équilibre. Ceci est dû au fait que la force V_{ch} rentre en compte dans l'équilibre des forces verticales (équation 3.2) ainsi que dans l'équilibre des moments (équation 3.4). De plus, d'autres itérations supplémentaires (voir section 3.4.5) peuvent être nécessaires pour le calcul de la force d'effet goujon (V_{dow}), notamment si l'action combinée de la force verticale V_{dow} et de la force horizontale N_s provoque la plastification des armatures flexionnelles.

$$V_{ch} = -N_{ch} \tan(\alpha_{ch}) \tag{3.5}$$

Validation de l'hypothèse de corps rigide

Les figures 3.8 et 3.9 permettent une comparaison entre l'état de fissuration correspondant au dernier palier de charge à celui observé à la rupture des spécimens du côté sans armature transversale (voir figure 3.8) et du côté avec armature transversale (voir figure 3.9). Il peut être observée que le dernier palier de mesures a généralement été effectué à un niveau de charge (V_p) très proche de la rupture (V_{max}). Toutefois, la fissure critique n'était pas suffisamment développée à ce moment pour les essais sans armature transversale (figure 3.8). Pour cette raison, des informations précises quant à sa cinématique ne sont pas disponibles et le travail de quantification de l'effort transmis par chaque MTET ne peut donc pas être effectué précisément. Pour les essais avec armature transversale, la situation était différente car dans le cas des essais SC12b, SC13b et SC16b, la fissure critique était bien développée au dernier palier de charge (figures 3.9(a-c)). Ceci permet donc de justifier l'hypothèse de la présence d'un corps rigide à ce moment. De plus, pour tous ces essais, le dernier palier de charge a été effectué pour des niveaux de charge proches de la rupture (rapport $V_p/V_{max,b} = 99\%$ pour l'essai SC12b, à 100% pour l'essai SC13b, à 88% pour l'essai SC16b et à 93% pour l'essai SC17b). Toutefois, l'hyphothèse de corps rigide, fondamentale pour la suite du travail de quantification des MTET, ne

peut pas être justifiée dans le cas de l'essai SC17b. En effet, la figure 3.9(d) montre clairement que deux fissures inclinées très rapprochées se sont développées au moment de la rupture, ce qui empêche de connaître de façon détaillée et certaine la cinématique de la fissure critique. Pour cette raison, le travail de quantification des MTET ne peut pas être effectué de manière correcte pour ce spécimen et n'est donc réalisé que pour les essais SC12b, SC13b et SC16b. Les sections 3.4.2 à 3.4.6 décrivent en détail les modèles utilisés ainsi que les calculs effectués pour la quantification de chaque MTET.

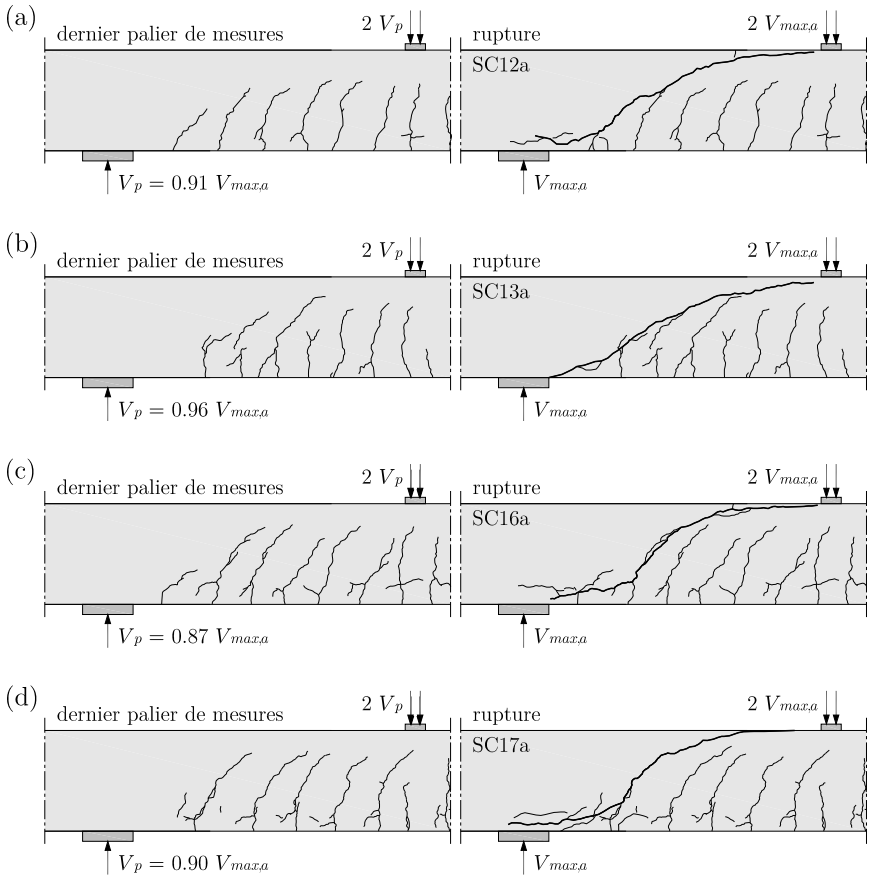


Fig. 3.8: Comparaison entre les états de fissuration correspondant au dernier palier de charge et à la rupture pour les essais sans armature transversale : **(a)** essai SC12a ; **(b)** essai SC13a ; **(c)** essai SC16a ; et **(d)** essai SC17a

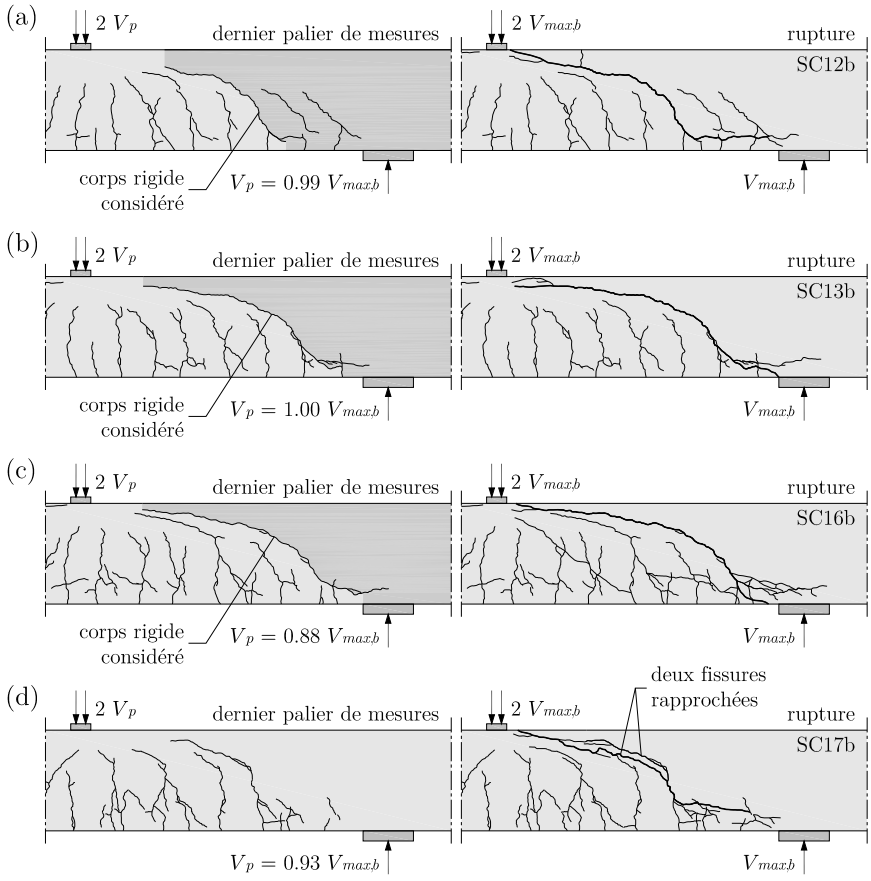


Fig. 3.9: Comparaison entre les états de fissuration correspondant au dernier palier de charge et à la rupture pour les essais avec armature transversale : **(a)** essai SC12b ; **(b)** essai SC13b ; **(c)** essai SC16b ; et **(d)** essai SC17b

3.4.2 Contribution de l'engrènement des granulats

Plusieurs approches peuvent être identifiées dans la littérature existante pour le calcul des contraintes d'engrènement basé sur les déplacements relatifs entre les deux lèvres d'une fissure [Tay70, Pau74a, Wal80, Dei87, Zar97, Ula03, Sag11]. Pour l'analyse effectuée sur les essais SC12b, SC13b et SC16b, le modèle proposé par Walraven [Wal80] a été retenu, en particulier pour ces bases physiques pouvant être facilement adaptées aux besoins de cette étude. Ce modèle, dont les principes sont montrés à la figure 3.10, permet en effet de lier de manière directe les déplacements relatifs des deux lèvres d'une fissure (ouverture w et glissement Δ, voir annexe A) aux contraintes normales (σ_{agg}) et tangentielles (τ_{agg}) transmises à travers cette dernière. Les contraintes d'engrènement peuvent être calculées selon le modèle de Walraven [Wal80] par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{agg} \\ \tau_{agg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{agg(w,\Delta)} \\ \tau_{agg(w,\Delta)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{pu}\ \left(\overline{A}_{\Delta} - \mu\, \overline{A}_{w}\right) \geq 0 \\ -\sigma_{pu}\ \left(\overline{A}_{w} + \mu\, \overline{A}_{\Delta}\right) \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

où $\sigma_{pu} = 6.39\, f_{c,cube}^{0.56}$ est la résistance plastique à la compression de la pâte de ciment ($f_{c,cube}$ est la résistance à la compression du béton mesurée sur cube, exprimée en MPa), $\mu = 0.4$ est le coefficient de frottement et $\overline{A}_w$ et $\overline{A}_\Delta$ représentent la somme des projections de toutes les surfaces de contact entre les granulats et la matrice cimentaire ($\overline{a}_w$ et $\overline{a}_\Delta$) respectivement sur les axes normal (axe y' qui se réfère à l'ouverture w) et tangentiel (axe x' qui se réfère au glissement Δ) à la fissure (figure 3.10). Les valeurs de $\overline{A}_w$ et $\overline{A}_\Delta$ sont influencées par la cinématique de la fissure, par la taille maximale des granulats (d_g) et par le coefficient p_k. Ce dernier exprime la probabilité qu'un point donné dans le volume de béton se trouve à l'intérieur d'un granulat. En d'autres termes, la valeur du coefficient p_k correspond au rapport entre le volume total des granulats et le volume total du béton (granulats et matrice cimentaire). Pour ce coefficient, une valeur $p_k = 0.75$ est proposée par Walraven [Wal80]. Cependant, sur la base de la composition des bétons utilisés (tableau 3.1) une valeur plus réaliste du coefficient p_k peut être calculée pour chaque type de béton. Ceci a été fait en considérant une densité moyenne de 2600 kg/m^3 pour les granulats et une densité de 2800 kg/m^3 pour le ciment. Avec ces hypothèses, une valeur $p_k = 0.76$ a été obtenue pour le béton normal (spécimens SC12 et SC13) et une valeur $p_k = 0.65$ a été obtenue pour le béton autoplaçant (spécimens SC16 et SC17).

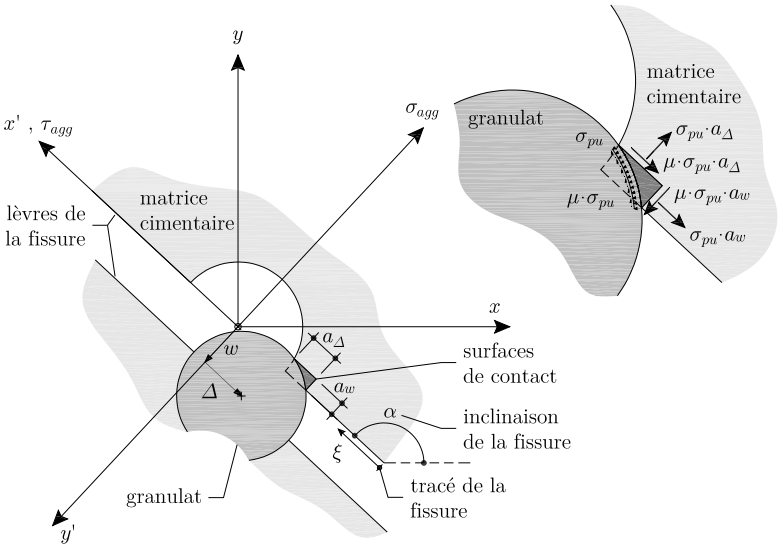


Fig. 3.10: Bases du modèle d'engrènement des granulats proposé par Walraven [Wal80] : définition de la cinématique de la fissure, des surfaces de contact entre les granulats et la matrice cimentaire, des contraintes d'engrènement et de la direction de forces d'engrènement résultantes

La cinématique prise en compte dans le modèle de Walraven [Wal80] considère que l'ouverture w de la fissure se produit entièrement avant le glissement Δ (figure 3.11(a)). Une généralisation du mode de développement de la cinématique a été récemment proposée par Guidotti [Gui10]. Comme présenté à la figure 3.11(a), ce modèle considère que seulement une partie w_0 de l'ouverture totale w de la fissure se fait avant tout glissement. Ensuite, la cinématique de la fissure se développe par un incrément de l'ouverture

combiné à un glissement (jusqu'à atteindre les valeurs maximales de l'ouverture w et du glissement Δ). Ceci se fait par un déplacement δ qui se produit avec une inclinaison γ par rapport au plan de la fissure (figure 3.11(a)), où :

$$\gamma = \text{atan}\frac{w - w_0}{\Delta} \tag{3.7}$$

D'autres propositions peuvent être trouvées dans la littérature concernant le mode de développement de la cinématique des fissures, en relation directe avec le phénomène de l'effort tranchant. Par exemple, celui proposé par Ulaga [Ula03] considère que le glissement se produit dés le début, de façon combinée avec l'ouverture (figure 3.11(a)). Toutefois, les propositions de Ulaga [Ula03] et de Walraven [Wal80] peuvent être considérées comme des cas particuliers du mode de développement de la cinématique proposé par Guidotti [Gui10] (où $w_0 = 0$ et $\gamma = \text{atan}\,(w/\Delta)$ pour le cas de Ulaga et où $w_0 = w$ et $\gamma = 0$ pour le cas de Walraven).

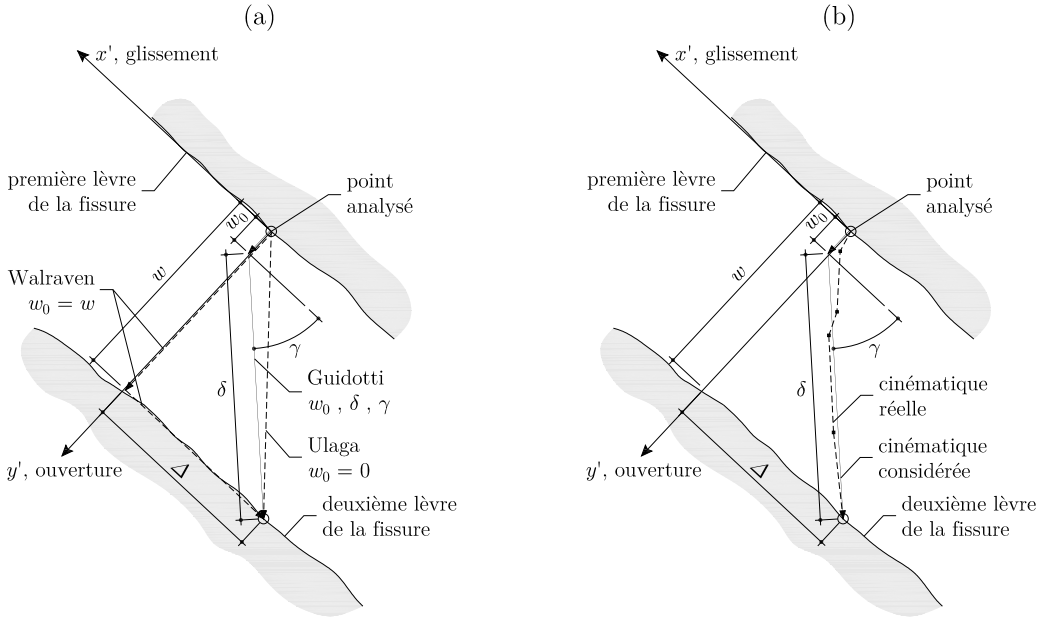


Fig. 3.11: Modes de développement de la cinématique : **(a)** modèles proposés par Walraven [Wal80], Ulaga [Ula03] et Guidotti [Gui10] ; et **(b)** comparaison entre la cinématique réelle et celle considérée (calculée avec la méthode des moindres carrés)

La figure 3.12 montre une comparaison entre des contraintes d'engrènement (σ_{agg} et τ_{agg}) calculées en fonction de l'amplitude du glissement Δ pour différentes valeurs de l'ouverture w en considérant les trois modes de développement de la cinématique préalablement énoncés. L'analyse des cette figure permet de noter que le mode de développement proposé par Walraven [Wal80] (courbes trait-tillées) représente une borne supérieure des contraintes d'engrènement, alors que celui proposé par Ulaga [Ula03] (courbes point-tillées) représente une borne inférieure. Les courbes continues de la figure 3.12, qui montrent des valeurs intermédiaires des contraintes d'engrènement, ont été calculées selon le mode de développement proposé par Guidotti [Gui10], en considérant une valeur

de l'ouverture initiale $w_0 = w/5$. La figure 3.12 montre que les contraintes d'engrènement augmentent avec l'accroissement du glissement Δ. Pour des valeurs modérées d'ouverture w, cette augmentation est très sensible à celle du glissement, ce qui n'est plus le cas pour des ouvertures plus importantes. Le rapport entre les amplitudes de l'ouverture w et du glissement Δ traduit l'influence sur l'intensité des contraintes d'engrènement générées. Les détails des formules utilisées pour la détermination de ces courbes sortent du contexte du travail de quantification des MTET qui est fait dans ce chapitre et ne seront donc pas présentés. Toutefois, ils peuvent être consultés ailleurs [Gui10, Wal80].

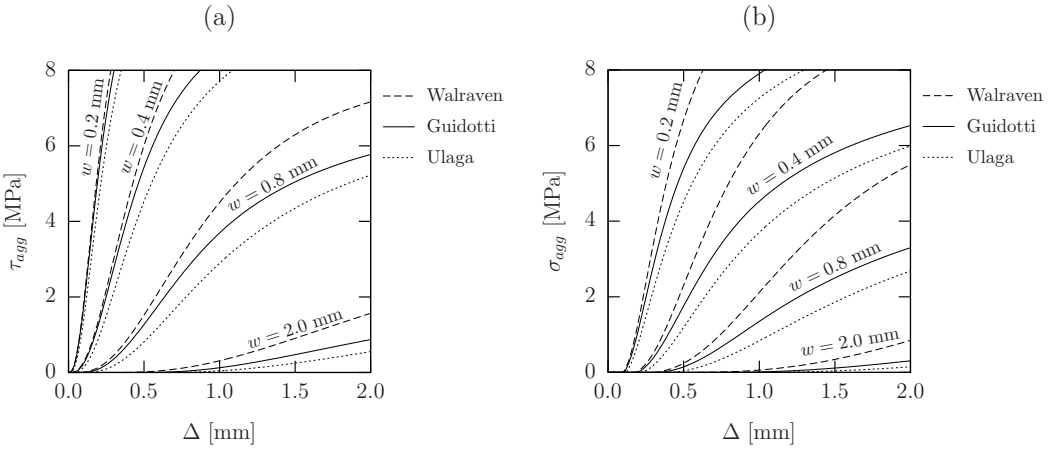


Fig. 3.12: Contraintes d'engrènement en fonction de l'ouverture et du glissement entre les lèvres de la fissure, calculés selon les modes de développement de la cinématique proposés par Walraven [Wal80], Ulaga [Ula03] et Guidotti [Gui10] (avec $w_0 = w/5$) : **(a)** contrainte tangengielle ; et **(b)** contrainte normale

Le calcul des contraintes peut être effectué en tout point le long du tracé de la fissure (ξ, voir figure 3.7). Les forces d'engrènement (V_{agg} et N_{agg}) peuvent ensuite être calculées par intégration de ces contraintes ($\sigma_{agg(\xi)}$ et $\tau_{agg(\xi)}$) et par leur projection sur les axes vertical et horizontal. La projection des contraintes est faite sur la base de l'inclinaison $\alpha_{(\xi)}$ de la fissure qui évolue le long de son tracé :

$$V_{agg} = -\int_{\xi} b \left(\tau_{agg(\xi)} \sin\alpha_{(\xi)} - \sigma_{agg(\xi)} \cos\alpha_{(\xi)}\right) d\xi \tag{3.8}$$

$$N_{agg} = \int_{\xi} b \left(\tau_{agg(\xi)} \cos\alpha_{(\xi)} + \sigma_{agg(\xi)} \sin\alpha_{(\xi)}\right) d\xi \tag{3.9}$$

La quantification des forces d'engrènement (V_{agg} et N_{agg}) a été faite pour les essais SC12b, SC13b et SC16b. Les fissures critiques observées dans ces essais ont dues être retranscrites dans un programme de dessin afin de disposer des éléments nécessaires aux calculs (inclinaison et cinématique de la fissure pour chaque point de calcul). Ainsi, le tracé de chaque fissure a été dessiné en reliant une série de points-clés dont la distance maximale ne dépassait pas la taille maximale des granulats ($d_g = 16$ mm). Des points-clé

supplémentaires ont également été ajoutés à chaque endroit où la distance entre le tracé dessiné et le tracé réel de la fissure dépassait une limite égale à la moitié de la taille maximale des granulats ($d_g/2$), qui peut être reliée à la perte de contact entre deux granulats [Wal80]. Cette stratégie de dessin a été adoptée car le modèle de Walraven [Wal80] prend déjà en compte la micro-rugosité de la fissure.
Pour se rapprocher le plus possible du vrai mode de développement de la cinématique (celui qui a été mesuré en chaque point), la proposition de Guidotti [Gui10] a finalement été retenue. En ce sens, la valeur de l'ouverture initiale (w_0) a été calculée individuellement, pour chaque point de la fissure, de façon à représenter au mieux la cinématique réelle (figure 3.11(b)) par une approche basée sur la méthode des moindres carrés. La cinématique des fissures critiques mesurée et utilisée pour les calculs est montrée à la figure 3.13(a). La distribution des contraintes d'engrènement (résultantes de σ_{agg} et τ_{agg}) et les forces résultantes obtenues (V_{agg} et N_{agg}, calculées selon les équations 3.8 et 3.9) sont présentées à la figure 3.13(b). Les valeurs de ces forces sont également résumées dans le tableau 3.5. Dans la figure 3.13(b) il convient de remarquer que les contraintes d'engrènement plus importantes se développent dans les régions plus raides des fissures critiques. Ceci est dû au fait que, comme visible dans la figure 3.13(a), les glissements entre les deux lèvres de la fissure sont plus marqués à ces endroits.

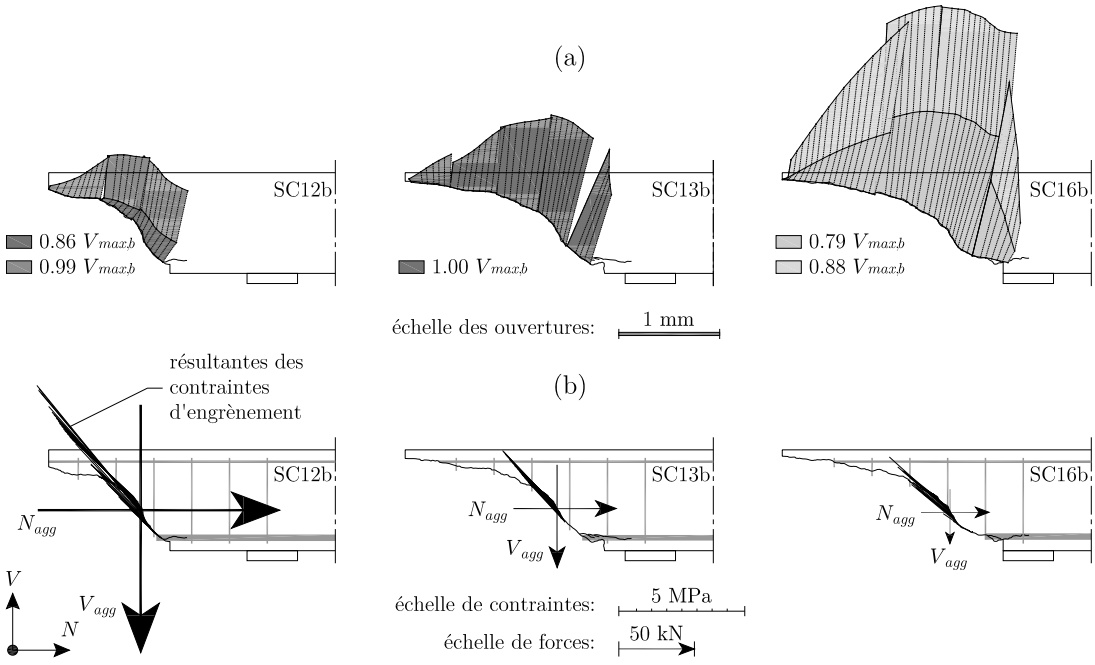


Fig. 3.13: Étude de la contribution de l'engrènement des granulats à la transmission de l'effort tranchant : **(a)** cinématique des fissures critiques ; et **(b)** profils des résultantes des contraintes d'engrènement et forces résultantes

Il peut aussi être noté que la contribution de l'engrènement des granulats à la transmission de l'effort tranchant (intensité de la force V_{agg}), varie sensiblement selon l'allure et la cinématique de la fissure critique. La contribution de ce mode de transmission est

en effet très importante pour l'essai SC12b (qui montre une fissure critique avec une branche inclinée légèrement plus raide et dont l'ouverture est plus petite) et devient moindre pour les autres essais (qui montrent des fissures critiques avec des branches inclinées plus allongées et dont l'ouverture est plus importante).

3.4.3 Contribution de l'armature transversale

Dans les éléments en béton armé, l'activation des armatures transversales est essentiellement due à la formation de fissures inclinées qui les traversent. En effet, au droit de chaque fissure inclinée, uniquement l'armature transversale peut participer à la reprise d'un effort de traction vertical. Ceci est particulièrement vrai si l'ouverture de la fissure inclinée est supérieure à celle pour laquelle la résistance résiduelle du béton à la traction est nulle (w_c), ce qui sera d'avantage détaillé à la section 3.4.4.
La valeur des contraintes de traction agissant dans une barre d'armature entourée de béton en fonction de l'ouverture de la fissure est fortement influencée par son adhérence avec le béton et par ses conditions d'ancrage [Fer07b]. Le calcul du profil des contraintes peut être effectué par l'étude du comportement d'un tirant en béton armé (figure 3.14(a)) [Sig95]. Selon cette approche, toutes les forces de traction au droit d'une fissure sont reprises par l'armature. Entre deux fissures successives, l'adhérence de l'armature avec le béton permet par contre diminution de la déformation. En effet, il est considéré que le béton peut participer à la reprise des efforts de traction dans les régions non fissurées (cet effet est connu sous le nom de *tension stiffening*).
Les contraintes d'adhérence (τ_b), qui influencent l'intensité des déformations, dépendent du glissement relatif entre l'armature et le béton (δ_b, voir figure 3.14(b)) et sont donc reliées à la résistance à la traction du béton (f_{ctm}) [Sig95]. Une manière simple mais cohérente pour quantifier ces contraintes consiste à utiliser une loi d'adhérence rigide-plastique, comme présenté à la figure 3.14(b). Cette loi simplifiée prévoit une contrainte d'adhérence constante $\tau_{b0} = 2\, f_{ctm}$ jusqu'à l'écoulement de l'armature. Dés l'atteinte de l'écoulement de l'armature (quand $\delta_b \geq \delta_{by}$), les déformations se localisent à l'endroit de la fissure et les contraintes d'adhérence diminuent ; il convient donc de considérer une valeur constante $\tau_{b1} = f_{ctm}$ pour la contrainte d'adhérence en régime plastique de l'armature (figure 3.14(b)). La pertinence de ces hypothèses pour des sollicitations de traction, avec ou sans atteinte de l'écoulement de l'armature, a été démontrée par Sigrist [Sig95] mais d'autres cas ont également été analysés par Fernández et al. [Fer07b].
La considération de valeurs constantes pour les contraintes d'adhérence (τ_{b0} et τ_{b1}) impliquent que la transmission des efforts entre l'acier et le béton se fassent de manière linéaire en s'éloignant des fissures. Comme montré à la figure 3.14(a), la transmission des efforts se fait avec deux gradients distincts ($m = 4\,\tau_{b0}/\text{Ø}$ et $m_y = 4\,\tau_{b1}/\text{Ø}$) dont les valeurs sont influencées d'une part par le diamètre de l'armature (Ø, qui influence l'étendue de l'interface sur laquelle les contraintes d'adhérence agissent) et d'autre part par la valeur des contraintes d'adhérence (τ_{b0} avant l'écoulement de l'armature et τ_{b1} après l'écoulement). En négligeant les déformations du béton (par rapport à de celles de l'armature), l'ouverture (w_i) d'une fissure i peut être calculée par intégration du profil

des déformations de la barre d'armature (ε_s, voir figure 3.14(a)) le long de la longueur contributive $\ell_{tot,i}$, laquelle dépend de la position et de l'ouverture des autres fissures :

$$w_i = \int_{\ell_{tot,i}} \varepsilon_s \, dx \tag{3.10}$$

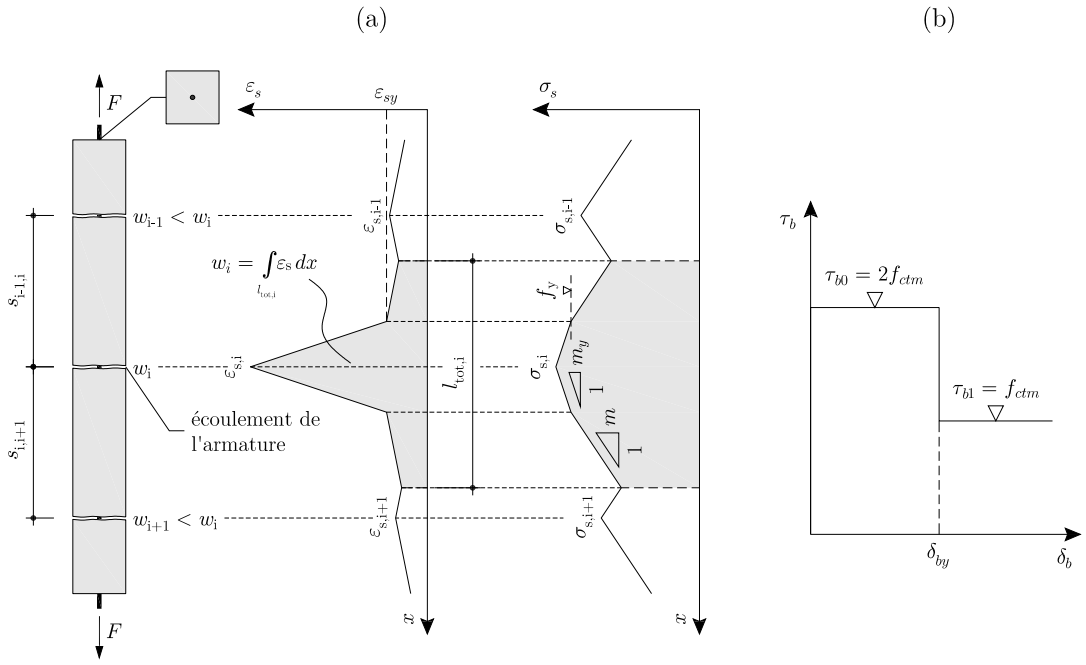


Fig. 3.14: Comportement d'un tirant en béton armé avec adhérence à l'interface entre l'armature et le béton : **(a)** relation entre l'ouverture des fissures et les déformations ainsi que les contraintes dans l'armature ; et **(b)** loi ridige-plastique considérée pour la contrainte d'adhérence

En considérant l'équation 3.10, le profil de contraintes dans la barre d'armature peut être calculé à partir des ouvertures et des espacements d'une série de fissures donnée ou vice-versa. Il est donc évident que la valeur des contraintes de traction au droit d'une fissure donnée est influencée par l'ouverture de celle-ci mais également par l'ouverture et la position des fissures avoisinantes (figure 3.14(a)).
Le calcul de ces contraintes est utile dans le cadre de cette étude car il permet de quantifier la force totale ($V_{sw,n}$) qui est transmise d'une part et d'autre de la fissure critique par chaque épingle (n étant le numéro de l'épingle considérée) :

$$V_{sw,n} = -\sigma_{sw,n} \frac{d_{bw}^2 \, \pi}{4} \tag{3.11}$$

où $\sigma_{sw,n}$ est la contrainte de traction agissant dans l'épingle n, à l'endroit de son croisement avec la fissure critique. La figure 3.15 montre la relation entre la contrainte de traction dans une épingle (σ_{sw}) et l'ouverture verticale de la fissure qui la traverse (v_{sw}, mesurée le long de l'axe de l'épingle). Cette relation a été calculée avec les propriétés

réelles des épingles disposées dans les spécimens SC12, SC13 et SC16, à savoir ; diamètre $d_{bw} = 6$ mm, limite d'écoulement $f_{yw} = 497$ MPa, résistance à la traction $f_{tw} = 595$ MPa, module élastique $E_{sw} = 205$ GPa et module d'écrouissage $E_{shw} = 1560$ MPa (défini comme étant la pente du diagramme contrainte-déformation de l'acier des épingles, mesurée entre le point de début de l'écoulement et le point du rupture). Cette relation montre qu'une faible ouverture de la fissure ($v_{swy} = 0.3$ mm) peut être suffisante pour provoquer l'écoulement d'une épingle. Ceci est dû au diamètre des épingles qui est particulièrement réduit ($d_{bw} = 6$ mm) augmentant le gradient m et donc la contrainte σ_{sw} relative à une ouverture donnée de la fissure (v_{sw}). Toutefois, une ouverture de la fissure plus conséquente ($v_{swt} = 3.4$ mm) est théoriquement nécessaire pour conduire à la rupture d'une épingle. Ces considérations sont importantes dans le cas des essais SC12b, SC13b et SC16b, car elle permettent de supposer que chaque épingle traversée par une fissure critique se trouve alors proche de l'écoulement.

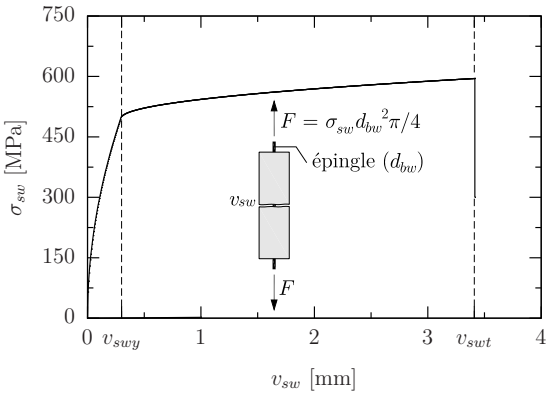


Fig. 3.15: Contraintes de traction agissant dans une épingle en fonction de l'ouverture verticale de la fissure qui la traverse

Pour ces trois essais, le calcul des forces $V_{sw,n}$ a été effectué en se basant sur l'ouverture verticale de la fissure critique (v_{sw1}) dans son point de rencontre avec l'épingle. Dans le cas des essais SC13b et SC16b, certaines épingles étaient traversées par une fissure inclinée supplémentaire, autre que par la fissure critique. L'ouverture verticale de cette fissure supplémentaire (v_{sw2}) et sa position relative à la fissure critique (distance $s_{1,2}$ entre les deux fissures) ont donc également dues être considérées. La figure 3.16 montre l'allure du profil des contraintes pour le cas le plus général possible : une épingle traversée par deux fissures espacées d'une distance $s_{1,2}$ et dont les ouvertures verticales v_{sw1} et v_{sw2} conduisent à l'écoulement de l'épingle en deux points différents (avec $\sigma_{sw1} > f_{yw}$ et $\sigma_{sw2} > f_{yw}$). En se référant à cette figure, le calcul des contraintes agissant en correspondance des deux fissures inclinées (σ_{sw1} pour la fissure critique et σ_{sw2} pour la deuxième fissure) peut être effectué par la résolution des équations 3.12 et 3.13.

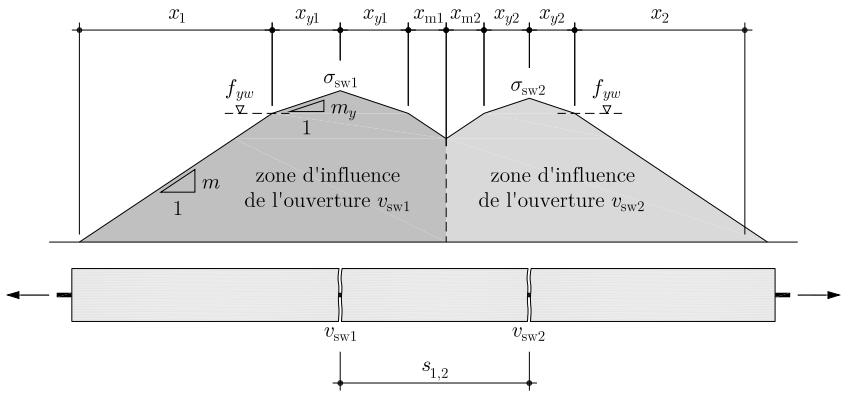


Fig. 3.16: Calcul des contraintes de traction agissant dans une épingle : allure du profil des contraintes pour un cas général avec deux fissures traversant l'épingle et provoquant son écoulement en deux points

$$\frac{(\sigma_{sw1} - f_{yw})\ x_{y1}}{E_{shw}} + \frac{2\ f_{yw}\ x_{y1}}{E_{sw}} + k_1 \frac{a_1\ \sigma_{sw1}\ x_1}{2\ E_{sw}} + \frac{(2\ a_1\ \sigma_{sw1} - x_{m1}\ m)\ x_{m1}}{2\ E_{sw}} = v_{sw1} \quad (3.12)$$

$$\frac{(\sigma_{sw2} - f_{yw})\ x_{y2}}{E_{shw}} + \frac{2\ f_{yw}\ x_{y2}}{E_{sw}} + k_2 \frac{a_2\ \sigma_{sw2}\ x_2}{2\ E_{sw}} + \frac{(2\ a_2\ \sigma_{sw2} - x_{m2}\ m)\ x_{m2}}{2\ E_{sw}} = v_{sw2} \quad (3.13)$$

où :

- $k_2 = 1$
- si une fissure traverse l'épingle : $\sigma_{sw2} = 0$; $k_1 = 2$; $x_{m1} = 0$; $x_{m2} = 0$ et $x_{y2} = 0$
- si deux fissures traversent l'épingle : $k_1 = 1$ et $x_{y1} + x_{m1} + x_{m2} + x_{y2} = s_{1,2}$
- si $\sigma_{sw1} \leq f_{yw}$: $x_1 = \dfrac{\sigma_{sw1}}{m}$; $x_{y1} = 0$ et $a_1 = 1$
- si $\sigma_{sw1} > f_{yw}$: $x_1 = \dfrac{f_{yw}}{m}$; $x_{y1} = \dfrac{(\sigma_{sw1} - f_{yw})}{m_y}$ et $a_1 = \dfrac{f_{yw}}{\sigma_{sw1}}$
- si $\sigma_{sw2} \leq f_{yw}$: $x_2 = \dfrac{\sigma_{sw2}}{m}$; $x_{y2} = 0$ et $a_2 = 1$
- si $\sigma_{sw2} > f_{yw}$: $x_2 = \dfrac{f_{yw}}{m}$; $x_{y2} = \dfrac{(\sigma_{sw2} - f_{yw})}{m_y}$ et $a_2 = \dfrac{f_{yw}}{\sigma_{sw2}}$

Les équations 3.12 et 3.13 sont valables pour tous les six cas possibles concernant une épingle traversée au maximum par deux fissures : une seule fissure avec ou sans écoulement de l'armature et deux fissures respectivement sans écoulement, avec écoulement en correspondance de l'une des deux fissures et avec écoulement en correspondance des deux fissures. Pour le développement de ces équations, les épingles ont été considérées parfaitement ancrées, ce qui se justifie en tenant compte de leur ancrage horizontal aux niveau des armatures longitudinales (figure 3.1).

La figure 3.17 résume les ouvertures verticales des fissures traversant chaque épingle ainsi que les profils de contraintes obtenus en appliquant les équations 3.12 et 3.13. Chaque force résultante ($V_{sw,n}$), calculée avec l'équation 3.11 sur la base des contraintes de traction ($\sigma_{sw1,n}$) agissant dans l'épingle n à l'endroit de son croisement avec la fissure critique, est aussi représentée dans cette figure. La valeur de la somme de toutes les forces agissant dans les épingles (V_{sw}) est aussi résumée dans le tableau 3.5. L'analyse de ces résultats montre que l'intensité de la force totale (V_{sw}) transmise par l'action des épingles d'une part et d'autre de la fissure critique est sensiblement influencée par l'allure de cette dernière et par sa cinématique. En effet, l'allure de la fissure critique de l'essai SC12b (figures 3.9 et 3.17), avec des longues branches de délamination et une branche inclinée plus courte, permet en effet d'activer uniquement trois épingles. Ceci n'est pas le cas pour les essais SC13b et SC16b, avec une branche inclinée de la fissure critique plus allongée permettant l'activation d'un nombre plus important d'épingles (quatre épingles au lieu de trois, voir figure 3.17). Il doit être souligné que ces résultats sont contraires à ceux obtenus dans l'étude de la contribution de l'engrènement des granulats (voir section 3.4.2). En effet, sa contribution était particulièrement importante dans le cas de l'essai SC12b (fissure critique moins ouverte, branche inclinée plus courte et légèrement plus raide) et moins importante pour les deux autres essais (fissures critiques plus ouvertes, branches inclinées plus allongées). Il faut également remarquer que, dans le cas de l'essai SC16b, l'épingle la plus proche du bord de la plaque d'appui n'a pas été considérée dans les calculs (figure 3.17). Cette épingle se trouve à l'intérieur de la branche horizontale de délamination, et a donc été considérée pour la quantification de l'effet goujon de l'armature flexionnelle (voir section 3.4.5).

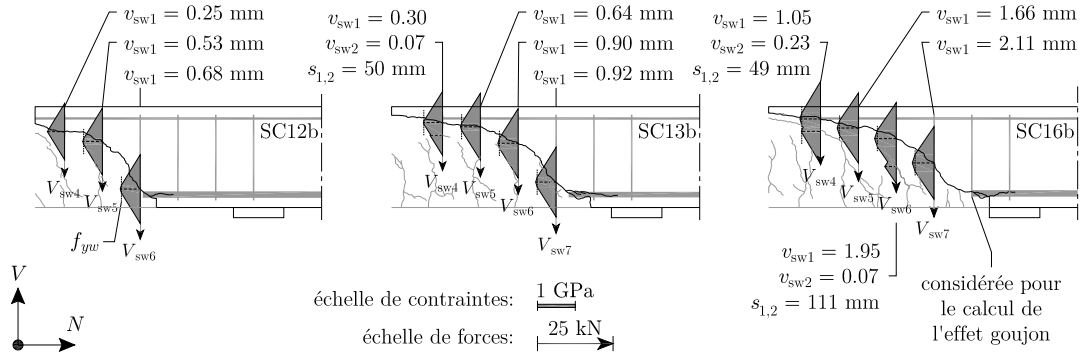


Fig. 3.17: Étude de la contribution de l'armature transversale à la transmission de l'effort tranchant : cinématique des fissures, profils des contraintes et forces résultantes

3.4.4 Contribution de la résistance résiduelle du béton à la traction

Comme il a été montré par Hillerborg [Hil83], dans la zone de propagation d'une fissure (connue sous le nom de *Fracture Process Zone*, FPZ) le béton montre une résistance résiduelle à la traction (σ_{res}). La figure 3.18 montre le résultat typique d'un essai de traction

sur un élément en béton non armé dans la phase qui suit à la formation de la fissure. La réponse de l'élément montre une relation adoucissante entre la résistance résiduelle à la traction (σ_{res}) et l'ouverture de la fissure (w). Au-delà d'une certaine ouverture (w_c), aucune résistance à la traction n'est plus offerte par le béton. À ce moment, les deux parties du tirant en béton non armé sont alors complètement désolidarisées.
Le comportement adoucissant peut être modélisé selon plusieurs approches [Hor92, Fib11]. Dans le cadre de ce travail, la proposition de Hordijk [Hor92] est prise en compte, notamment pour sa bonne corrélation avec le comportement réel des bétons à résistance normale. Selon les propositions de cet auteur, la relation $\sigma_{res} - w$ peut être calculée avec l'équation 3.14 dont l'allure est présentée à la figure 3.18.

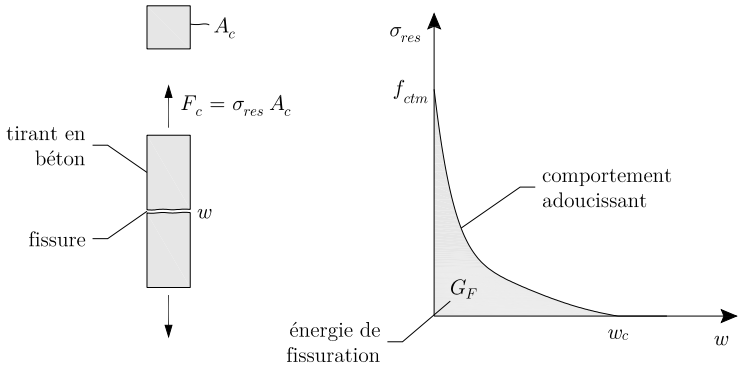


Fig. 3.18: Comportement adoucissant d'un tirant en béton dans la phase successive à la fissuration : relation entre la résistance résiduelle à la traction et l'ouverture de la fissure

$$\sigma_{res} = f_{ctm} \left[\left(1 + \left(b_1 \frac{w}{w_c} \right)^3 \right) e^{-b_2 \frac{w}{w_c}} - \frac{w}{w_c} \left(1 + b_1^3 \right) e^{-b_2} \right] \tag{3.14}$$

où f_{ctm} est la résistance moyenne à la traction du béton et $b_1 = 3.0$ et $b_2 = 6.93$ sont les constantes du modèle [Hor92]. La valeur de l'ouverture w_c, à partir de laquelle aucune résistance résiduelle à la traction n'est plus possible, peut être reliée à l'énergie de fissuration (G_F) par :

$$w_c = 5.14 \frac{G_F}{f_{ctm}} \tag{3.15}$$

Pour le calcul de l'énergie de fissuration (G_F), la proposition du Model Code 2010 [Fib11] peut être utilisée :

$$G_F = 73\, f_{cm}^{0.18} \tag{3.16}$$

où f_{cm} est la résistance à la compression du béton mesurée sur cylindre (exprimée en MPa).

En se référant aux trois essais étudiés (SC12b, SC13b et SC16b), ce phénomène peut garantir la transmission d'une certaine partie de l'effort tranchant (V_{res}) de part et d'autre de la fissure critique, notamment au sommet des fissures critiques, où leur ouverture reste limitée (figure 3.19(a)). Du fait de l'inclinaison des fissures critiques dans ces zones, une force horizontale (N_{res}) peut également être transmise à travers les fissures et doit donc être considérée dans l'équilibre des corps rigides précédemment définis (figure 3.7). Les propriétés mesurées des matériaux (f_{cm} et f_{ctm}, voir tableau 3.3)) ont été utilisées pour l'application des équations 3.15 et 3.16. Des valeurs de l'ouverture limite $w_c = 0.252$ mm, $w_c = 0.250$ mm et $w_c = 0.244$ mm ont été calculées respectivement pour les essais SC12b, SC13b et SC16b. Il faut noter que l'effet négatif des contraintes de compression existantes dans les régions d'étude (sommets des fissures critiques, à l'intérieur de la zone comprimée) sur la résistance à la traction du béton [Kup69] a été négligé. Les conséquences de cette hypothèse seront discutées ultérieurement. L'équation 3.14 a ensuite été utilisée pour déterminer le profil des résistances résiduelles $\sigma_{res(\xi)}$ actives le long du tracé des fissures critiques (ξ, voir figure 3.7). Ceci a été fait en considérant la cinématique mesurée (ouvertures w) des fissures critiques qui est présentée à la figure 3.19(a). Des mesures suffisamment précises n'étaient toutefois pas disponibles pour l'essai SC16b au sommet de la fissure critique où l'ouverture de la fissure (w) devrait être inférieure à w_c. Dans ce cas, la quantification de l'effet de la résistance résiduelle à la traction n'a donc malheureusement pas pu être effectuée.

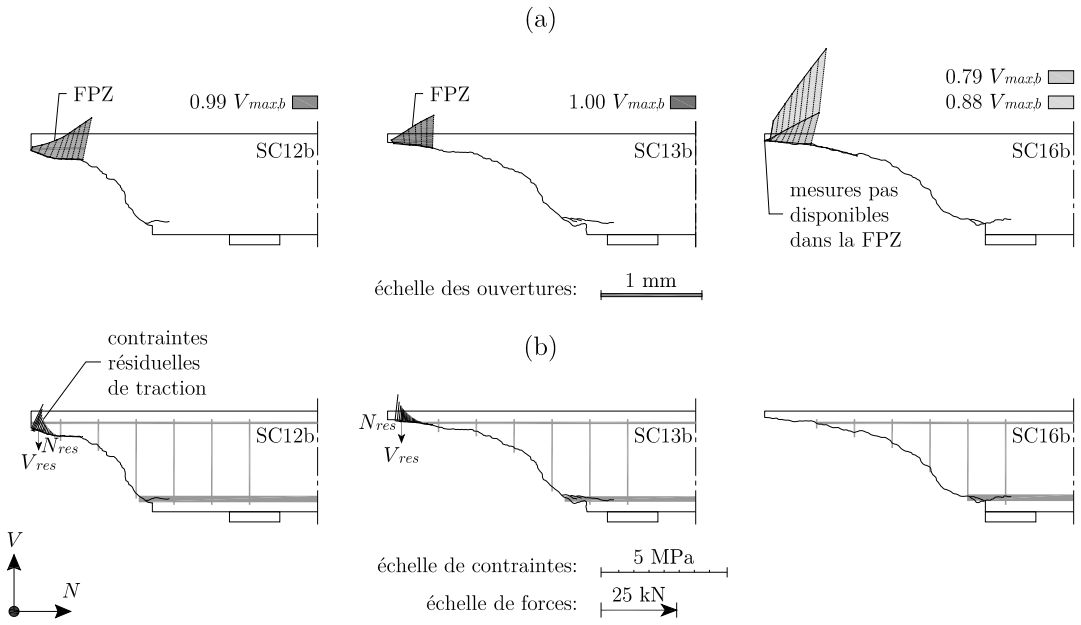


Fig. 3.19: Étude de la contribution de la résistance résiduelle du béton à la traction à la transmission de l'effort tranchant : **(a)** cinématique de la zone de propagation des fissures critique (FPZ) ; et **(b)** profils des contraintes résiduelles et forces résultantes

Les équations 3.17 et 3.18 montrent que l'intégration sur l'épaisseur des spécimens (b) et long du tracé de la fissure critique (ξ) des projections sur les axes vertical et horizontal des contraintes $\sigma_{res(\xi)}$ permet le calcul des forces transmises par la résistance résiduelle du béton à la traction (V_{res} et N_{res}). La projection des contraintes est faite sur la base de l'inclinaison de la fissure ($\alpha_{(\xi)}$) qui évolue le long de son tracé.

$$V_{res} = \int_{\xi} b\, \sigma_{res(\xi)} \cos \alpha_{(\xi)}\, d\xi \tag{3.17}$$

$$N_{res} = -\int_{\xi} b\, \sigma_{res(\xi)} \sin \alpha_{(\xi)}\, d\xi \tag{3.18}$$

Les résultats obtenus sont synthétisés dans le tableau 3.5 et la figure 3.19(b) montre le profil des contraintes résiduelles ($\sigma_{res(\xi)}$) ainsi que les forces résultantes (V_{res} et N_{res}). Comme il peut être remarqué dans le tableau 3.5, ce mode de transmission a une influence très limitée sur la transmission de l'effort tranchant total notamment en raison de la taille des spécimens et à l'ouverture importante des fissures. De plus, si l'effet négatif des contraintes de compression sur la résistance à la traction du béton [Kup69] avait été considéré, la contribution de ce MTET aurait été ultérieurement réduite. Toutefois, dans le cas de spécimens avec une hauteur de la section d'avantage limitée (qui développent donc des fissures moins ouvertes), sa contribution pourrait s'accroître.

3.4.5 Contribution de l'armature flexionnelle (effet goujon)

L'effet goujon est l'un des MTET qui a été le plus largement étudié dans la littérature [Kre66a, Kre66b, Tay69, Pau74b, Cha87, Dei92, Dei93, Jel99, Zar03]. Dans le cadre de cette recherche, il est intéressant d'étudier la force verticale transmise par les armatures flexionnelles (V_{dow}, voir figure 3.7). La rigidité non négligeable de ces dernières dans les spécimens étudiés (trois barres de diamètre $d_b = 22$ mm ou $d_b = 26$ mm) est ultérieurement augmentée par la présence de l'armature transversale (épingles de diamètre $d_{bw} = 6$ mm espacées de 150 mm). En effet, l'intensité de l'effet goujon dépend essentiellement du diamètre des armatures, de la présence ou non d'armatures transversales, des propriétés géométriques et de la résistance à la traction du béton d'enrobage ainsi que de la position de la branche inclinée de la fissure critique (qui indique le point où les armatures flexionnelles sont sollicitées à l'effort tranchant) par rapport à l'appui. Malgré la grande quantité d'études existantes à ce sujet, un modèle numérique a été spécialement conçu pour la prise en compte de l'effet goujon dans le cadre de l'étude des essais SC12b, SC13b et SC16b. Ce modèle, dont les principes sont présentés à la figure 3.20, s'est révélé indispensable pour prendre en compte le plus fidèlement possible les caractéristiques des éléments étudiés, à savoir : la cinématique de la fissure critique (déplacement vertical mesuré à l'endroit de son croisement avec l'armature flexionnelle), la position de la branche inclinée de la fissure critique et les caractéristiques de l'armature transversale (sa position, sa résistance et son comportement adhérent avec le béton).

Le modèle numérique utilisé correspond à un modèle cohésif de fissuration tenant compte de la résistance à la traction du béton d'enrobage. Comme montré à la figure 3.20, cette dernière a été introduite dans la modélisation par une série de ressorts non linéaires espacées d'une distance ℓ_c. Le comportement de ces ressorts est élastique jusqu'à fissuration (admettant une longueur active pour ce ressort égale à la taille maximale du granulat) puis adoucissant au delà (figure 3.21). Chaque ressort tient compte de la surface efficace de béton ($A_{c,ef} = b_{ef}\ \ell_c$), définie par le produit entre l'épaisseur effective du spécimen (b_{ef}) et la distance entre deux ressorts successifs (ℓ_c). L'épaisseur effective du spécimen est calculée en soustrayant l'épaisseur totale des armatures flexionnelle (trois barres de diamètre d_b) à l'épaisseur du spécimen (b) :

$$b_{ef} = b - 3\ d_b \tag{3.19}$$

Ainsi, la charge de fissuration (F_{ct}) relative à chaque ressort vaut :

$$F_{ct} = A_{c,ef}\ f_{ctm} = b_{ef}\ \ell_c\ f_{ctm} \tag{3.20}$$

Le comportement adoucissant du béton [Hil83] a été considéré selon les principes déjà présentés à la section 3.4.4 (voir figure 3.18 et équation 3.14). La présence des armatures transversales et leur adhérence avec le béton ont également été considérées. Comme montré à la figure 3.20, les épingles ont aussi été modélisées par des ressorts non-linéaires espacés d'une distance $\ell_w = 150$ mm (correspondante à l'espacement des épingles placées dans les spécimens analysés). Le comportement de ces ressorts est élastique jusqu'à l'écoulement des épingles puis écrouissant jusqu'à leur rupture (les principes décrivant le comportement de ce tirant en béton armé ont déjà été présentés à la section 3.4.3, voir figure 3.15). Les contraintes de compression dans les ressorts non-linéaires étant du même ordre de grandeur que celles de traction (ce qui sera montré plus loin, voir figure 3.23), le comportement de ces derniers a été admis élastique-linéaire. Cette hypothèse a été faite à la fois pour les ressorts modélisant le béton d'enrobage et pour ceux modélisant les épingles.

Comme mis en avant dans la figure 3.20, la distance entre l'appui des spécimens (bord interne de la plaque d'appui) et le croisement de la branche inclinée de la fissure critique avec l'armature flexionnelle peut être considérée en variant la longueur de la console modélisée (L_{dow}). La définition de cette longueur est très importante car elle définit la rigidité du modèle ainsi que le nombre d'épingles à modéliser et leur position relative à la fissure critique.

L'utilisation de ce modèle numérique permet de mettre en relation la cinématique de la fissure critique avec l'effort tranchant transmis par effet goujon (V_{dow}). La cinématique considérée concerne un déplacement vertical (v_{dow}) qui est imposé à l'extrémité de la console, comme montré à la figure 3.20.

Il est à noter qu'il a été admis que l'intensité de la force V_{dow} ne peut pas dépasser celle qui provoque le début de la plastification de l'armature flexionnelle. Pour cette raison, la contrainte maximale présente dans l'armature flexionnelle (σ_s) ne peut pas

dépasser la contrainte d'écoulement (f_y). La contrainte σ_s résulte de la somme entre les contraintes $\sigma_{s(N_s)}$, dues à la force de traction dans les armatures (N_s, voir figure 3.7), et les contraintes $\sigma_{s(V_{dow})}$, dues à la force d'effet goujon (V_{dow}).

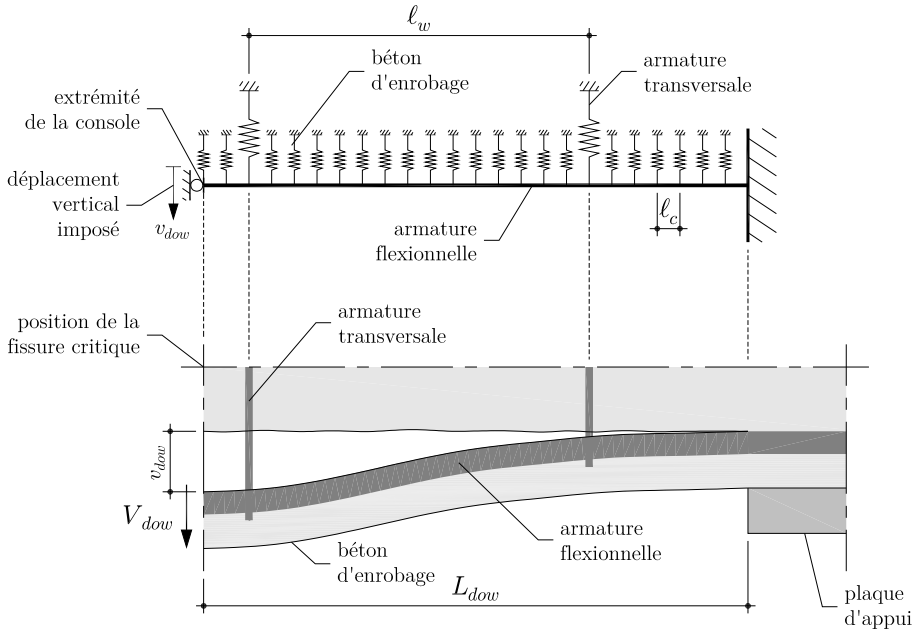


Fig. 3.20: Caractéristiques du modèle cohésif de fissuration utilisé pour le calcul de la contribution de l'effet goujon.

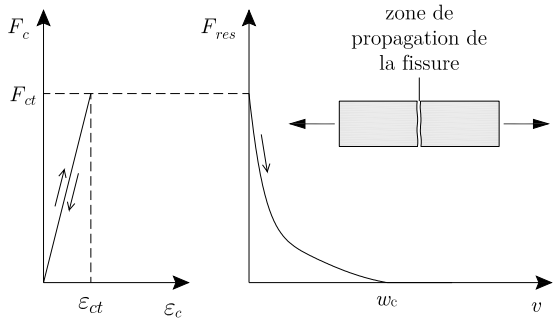


Fig. 3.21: Caractéristiques des ressorts non-linéaires du modèle cohésif de fissuration : comportement du béton d'enrobage avant et après la fissuration

Ce modèle numérique a donc été appliqué pour étudier l'effet des principaux paramètres (L_{dow}, d_b, armature transversale) en considérant une console ayant des caractéristiques similaires à celles des spécimens faisant le sujet du travail de quantification des MTET. Trois diamètres différents de l'armature flexionnelle (qui est composée par trois barres) ont été considérés : $d_b = 26$ mm, $d_b = 20$ mm et $d_b = 14$ mm. Les relations obtenues entre la force d'effet goujon (V_{dow}) et la longueur de la console (L_{dow}) sont montrées pour les trois diamètres respectivement dans les figures 3.22(a) à 3.22(c). Chacun de ces trois graphiques montre les résultats d'un calcul effectué sans les armatures transver-

sales (courbes continues) et d'un autre effectué avec les armatures transversales (courbes trait-tillées). Tous les calculs ont été effectués pour une déformation imposée constante $v_{dow} = 0.5$ mm et pour une contrainte $\sigma_{s(N_s)} = 188$ MPa (contrainte due à l'action de la force N_s, qui peut varier entre 300 kN pour le diamètre $d_b = 26$ mm et 87 kN pour le diamètre $d_b = 14$ mm).

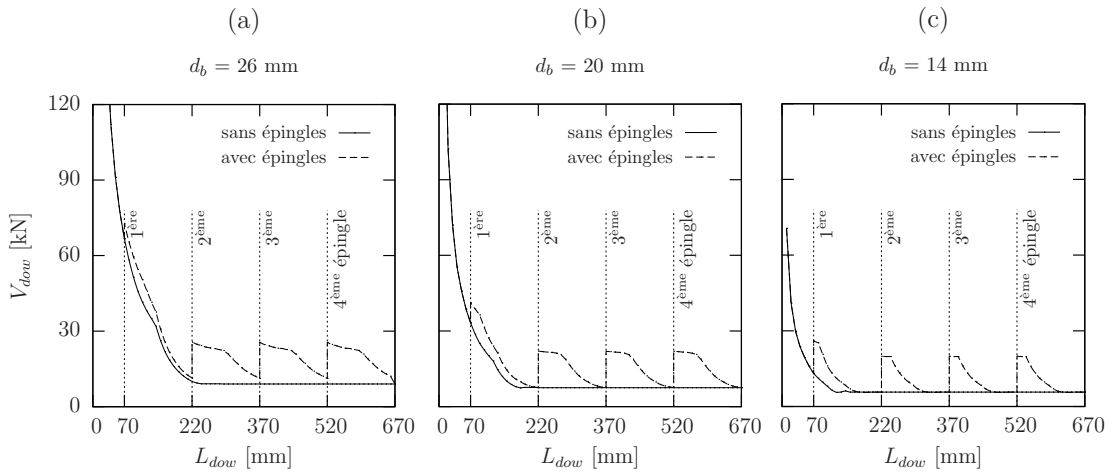


Fig. 3.22: Relation entre la force d'effet goujon et la distance entre l'appui et le point de croisement de la branche inclinée de la fissure critique avec l'armature flexionnelle, calculée pour un diamètre de l'armature flexionnelle de : **(a)** 26 mm ; **(b)** 20 mm ; et **(c)** 14 mm. Tous les calculs ont été effectués avec $b = 300$ mm, $f_{ctm} = 3$ MPa, $f_{cm} = 40$ MPa, $f_y = 580$ MPa, $E_s = 205$ GPa, $d_{bw} = 6$ mm, $f_{yw} = 500$ MPa,, $f_{tw} = 600$ MPa, $E_{sw} = 205$ GPa, $E_{swh} = 1560$ MPa, position de la première épingle à 70 mm du bord de la plaque d'appui, $\ell_w = 150$ mm, $v_{dow} = 0.5$ mm et $\sigma_{s(N_s)} = 188$ MPa

L'analyse de ces résultats permet de faire les considérations suivantes :

– le paramètre qui influence le plus l'intensité de la force V_{dow} est la distance entre l'appui et le point de croisement de la branche inclinée de la fissure critique avec l'armature flexionnelle (L_{dow}). Au delà d'une certaine longueur L_{dow}, seulement une force relativement petite peut être transmise par effet goujon.

– L'armature transversale joue aussi un rôle relativement important. En particulier, quand la longueur L_{dow} est telle qu'une épingle se trouve à proximité de l'extrémité de la console (point où la déformation verticale v_{dow} est imposée). Dans ces cas, en considérant les propriétés des épingles modélisées (diamètre $d_{bw} = 6$ mm et limite d'écoulement $f_{yw} = 500$ MPa), une augmentation de la force V_{dow} d'environ 14 kN est mise en avant par rapport au calcul sans les armatures transversales. Il faut aussi noter que l'intensité de cet effet est indépendante de la longueur L_{dow}, pour autant que cette dernière ne soit pas trop courte.

– Pour des longueurs L_{dow} réduites, le diamètre des armatures flexionnelles d_b montre aussi une nette influence, avec le développement de forces V_{dow} plus élevées pour les diamètres plus grands. Par contre, cet effet se réduit rapidement avec l'augmentation

de la longueur L_{dow}, jusqu'à ce que seulement une force minimale peut encore être transmise par effet goujon.

– L'effet de la contrainte $\sigma_{s(N_s)} = 188$ MPa se traduit par un point d'inflexion dans les courbes obtenues. Ce point d'inflexion se trouve à une position correspondante à la longueur L_{dow} au-dessous de laquelle l'armature flexionnelle se plastifie à cause de l'action combinée des forces N_s et V_{dow}. Au-dessous de cette longueur, l'intensité de la force V_{dow} doit être bornée, ce qui donne lieu au point d'inflexion dont la position est très claire pour les diamètres les plus grands (entre la première et la deuxième épingle, voir figures 3.22(a-b)).

En se référant aux trois essais étudiés (SC12b, SC13b et SC16b), l'effet goujon des armatures flexionnelles peut garantir la transmission d'une certaine partie de l'effort tranchant (V_{dow}) de part à d'autre de la fissure critique. L'analyse de l'allure des fissures critiques montre des différences assez remarquables au niveau de la longueur L_{dow} (des longueurs $L_{dow} = 360$ mm, $L_{dow} = 170$ mm et $L_{dow} = 70$ mm sont à considérer respectivement pour les essais SC12b, SC13b et SC16b, voir figure 3.23). Les valeurs mesurées des déplacements verticaux qui ont été utilisées pour les calculs sont résumées à la figure 3.23. Cette figure présente également les profils des contraintes dans le béton, les forces dans les épingles et les forces d'effet goujon (V_{dow}) obtenues. Les valeurs de ces dernières sont également résumées dans le tableau 3.5.
Ces résultats montrent que pour l'essai SC12b, où le croisement de la branche inclinée de la fissure critique avec l'armature flexionnelle se fait loin de l'appui et de la première épingle intersectée par la fissure de délamination, la contribution de l'effet goujon est presque négligeable. Au contraire, la longueur L_{dow} est beaucoup plus réduite pour l'essai SC13b et en particulier pour l'essai SC16b, rendant conséquente la contribution de l'effet goujon.
Dans le cas de l'essai SC16b, avec une longueur L_{dow} très réduite et une valeur particulièrement importante de la déformation verticale imposée ($v_{dow} = 1.23$ mm), un calcul itératif a du être entrepris pour trouver la valeur de la force V_{dow}. En effet, sous l'action combinée des contraintes $\sigma_{s(N_s)}$ (dues à la force de traction N_s) et des contraintes $\sigma_{s(V_{dow})}$ (due à la force V_{dow}), l'armature flexionnelle se plastifie limitant ainsi l'intensité de la force V_{dow}. Comme expliqué dans la section 3.4.1, la nécessité d'un calcul itératif est due au fait que la valeur de la force de traction N_s (et donc celle des contraintes $\sigma_{s(N_s)}$) dépend de la valeur de la force V_{dow} (équations 3.2 à 3.4).

3.4.6 Contribution de la bielle de compression inclinée

Le dernier MTET possible dans les poutres en béton armé avec une armature transversale est celui dû à l'inclinaison de la bielle de la membrure comprimée. La figure 3.24 présente deux différents modèles bielles-et-tirants possibles pour la reprise de l'effort tranchant [Leo74]. Dans le premier modèle (figure 3.24(a)), la membrure tendue et celle comprimée sont parallèles (et horizontales). Ainsi, la totalité de l'effort tranchant est transférée par une série de bielles inclinées et d'étriers dans la partie centrale

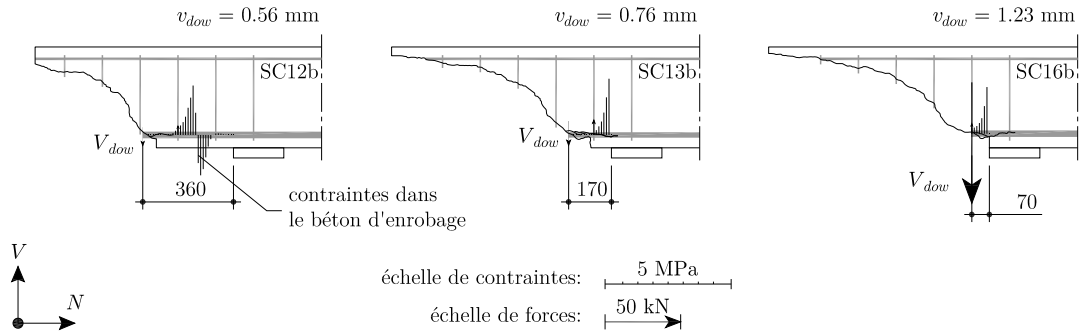


Fig. 3.23: Étude de la contribution de l'effet goujon à la transmission de l'effort tranchant : longueurs des consoles et valeurs cinématiques utilisées, profils des contraintes dans le béton d'enrobage et forces résultantes

de l'élément. Par conséquent, les forces dans les membrures horizontales diminuent en s'éloignant du point d'introduction de la charge. Une autre solution d'équilibre est toutefois possible (figure 3.24(b)) avec une inclinaison de la membrure comprimée (angle α_{ch}). Dans ce cas, une partie de l'effort tranchant (V_{ch}, voir équation 3.5) est directement transférée par la membrure comprimée. Les bielles inclinées et les étriers dans la partie centrale de l'élément doivent alors équilibrer uniquement la partie restante de l'effort tranchant. Il convient également de remarquer que le bras de levier entre la membrure tendue et celle comprimée diminue en s'éloignant du point d'introduction de la charge, ce qui signifie que les membrures y sont plus sollicitées que dans le premier modèle.

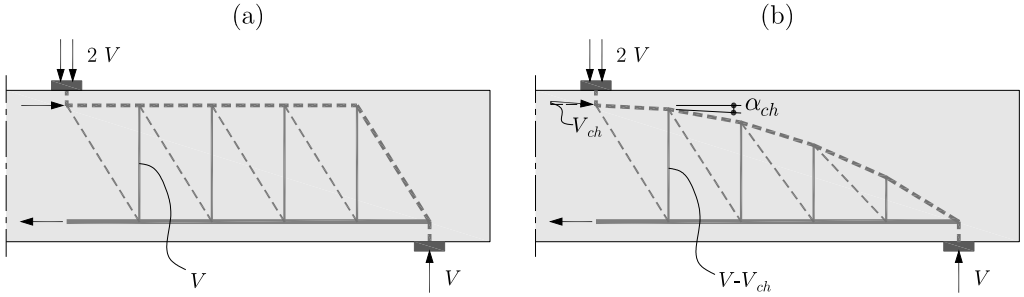


Fig. 3.24: Étude de la contribution de l'inclinaison de la bielle inclinée à la transmission de l'effort tranchant. Modèles bielles-et-tirants avec : **(a)** une membrure comprimée horizontale ; et **(b)** une membrure comprimée inclinée

L'analyse des corps rigides des essais SC12b, SC13b et SC16b (figures 3.9(a-c)) montre que l'épaisseur de la zone comprimée est très limitée. Cette épaisseur mesure 37 mm dans le corps rigide de l'essai SC13b (figure 3.9(b)) et 28 mm dans celui de l'essai SC16b (figure 3.9(c)). De plus, la branche de délamination de la fissure critique dans la zone comprimée est quasi horizontale (se référer à la définition des branches de la fissure critique qui a été faite dans la section 3.2), et se trouve proche du niveau des armatures comprimées. Ces faits impliquent qu'uniquement une inclinaison (α_{ch}) très limitée de la bielle comprimée permettrait la transmission directe d'une partie de l'effort tranchant à l'endroit de la zone comprimée. La contribution de la bielle inclinée à la transmission de

l'effort tranchant peut donc être négligée car, en considérant l'équation 3.5, l'intensité de la force V_{ch} tend à s'annuler si l'amplitude de l'angle α_{ch} tend à 0. Bien évidemment, une inclinaison plus importante de la bielle comprime est possible, mais celle-ci n'amènerait pas à la transmission directe d'un effort tranchant à l'endroit de la zone comprimée. La composante verticale de cette bielle inclinée devrait donc être transmise plus loin à travers la fissure critique par l'activation d'autres MTET qui ont déjà été considérés précédemment (résistance résiduelle du béton à la traction, engrènement des granulats ou armatures transversales).
Pour l'essai SC12b, l'épaisseur de la zone comprimé au sommet de la fissure critique est plus importante (72 mm, voir figure 3.9(a)). La contribution de la bielle inclinée à la transmission d'une partie de l'effort tranchant pourrait donc ne plus être négligeable. Toutefois, l'épaisseur limitée de cette zone, en comparaison avec la taille du réseau pour les mesures au déformètre (triangles équilatéraux avec un longueur des côtés de 100 mm, voir figure 3.1), ne permet pas de disposer de mesures suffisamment détaillées pour l'estimation de l'inclinaison de la bielle et donc de son éventuelle contribution à la transmission de l'effort tranchant. Par conséquent, la valeur de la force V_{ch} pour l'essai SC12b ne peut pas être calculée.
Dans la zone comprimée des spécimens, la transmission d'un effort tranchant par effet goujon des armatures comprimées semble également être difficile. En considérant le modèle présenté à la section 3.4.5, la distance relativement importante entre le sommet de la fissure critique et le point d'introduction de la charge (figure 3.9(a-c)) ainsi que le faible diamètre des armatures comprimées (trois barres de diamètre 10 mm) justifient cette affirmation et donc le fait de négliger cet effet.

3.4.7 Discussion des résultats

Les MTET énoncés dans la section 3.4.1 (figure 3.7) ont été discutés en détail dans les sections 3.4.2 à 3.4.6. Le calcul de leur contribution à la transmission de l'effort tranchant a été réalisé en se basant entièrement sur la cinématique mesurée des fissures critiques. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau 3.5 et sont aussi présentés à la figure 3.25. Cette figure met en avant toutes les forces qui ont été quantifiées sur la base de cette cinématique ainsi que celles qui ont été calculées pour satisfaire aux conditions d'équilibre du corps rigide (équations 3.2 à 3.4).
Ces résultats montrent une très bonne correspondance entre l'effort tranchant total quantifié (V_{tot}, voir équation 3.1) et l'effort tranchant agissant dans les spécimens au moment où les mesures de la cinématique ont été effectuées (V_p). Les valeurs du rapport V_{tot}/V_p (1.29 pour l'essai SC12b, 1.03 pour l'essai SC13b et 1.02 pour l'essai SC16b) montrent uniquement une surestimation des effort transmis dans le cas de l'essai SC12b. Cette surestimation est probablement introduite par la quantification de l'effort transmis par engrènement de granulats (V_{agg}) avec le modèle proposé par Walraven [Wal80]. En effet, l'application de ce modèle pour la quantification des contraintes d'engrènement le long de la fissure critique, montre une sensibilité importante à son inclinaison. Il a pu être observé que la présence d'une zone particulièrement raide dans la fissure critique (ce qui

est le cas pour l'essai SC12b, voir figure 3.5(b)) peut donner lieu à des forces verticales résultantes assez conséquentes.

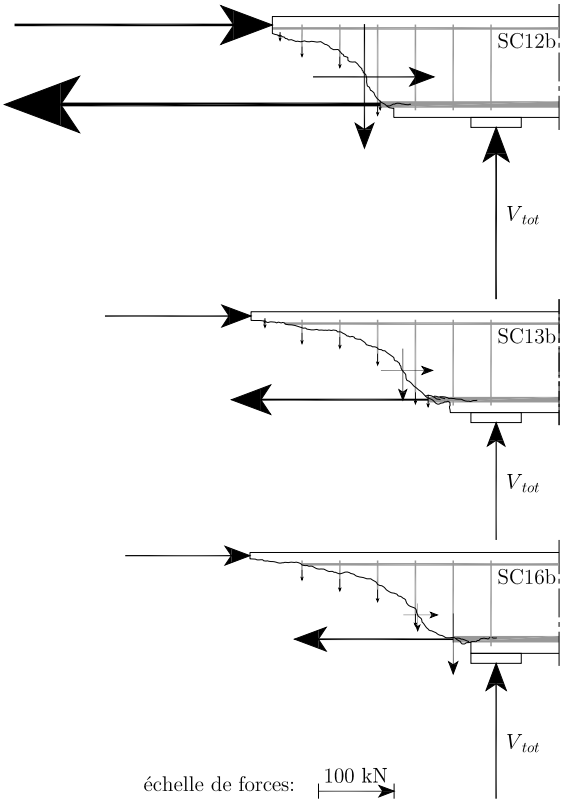


Fig. 3.25: Résumé des résultats de la quantification des forces agissant sur les corps rigides

L'intérêt principal de ce travail de quantification réside dans la possibilité de comparer le fonctionnement de chaque spécimen et de le mettre directement en relation à l'allure de sa fissure critique. La figure 3.26 montre ainsi l'importance relative de chaque MTET par rapport à l'effort tranchant total qui a été quantifié (V_{tot}). Les considérations suivantes peuvent donc être faites :

– l'importance relative de chaque MTET varie sensiblement d'un essai à l'autre et peut s'expliquer par les différences observées dans l'allure des fissures critiques (figure 3.5(b)) ainsi que dans leur cinématique (figure 3.4(b)).

– L'engrènement des granulats est clairement dominant pour l'essai SC12b (72%) et également important pour l'essai SC13b (44%). Par contre, en raison de la grande ouverture de la fissure critique et de la forme de sa branche inclinée plus allongée, cette contribution est limitée pour l'essai SC16b (20%).

– L'effet goujon est particulièrement important pour l'essai SC16b (45%). Ceci est dû à la distance relativement faible observée entre l'appui du spécimen et le point de croisement de la branche inclinée de la fissure critique avec l'armature flexionnelle

(longueur $L_{dow} = 70$ mm, voir section 3.4.5) ainsi qu'au fait qu'une épingle se trouve très proche de ce point (première épingle en direction de la plaque d'appui, voir section 3.4.5). Par contre, pour les essais dans lesquels l'engrènement des granulats a été plus important (à cause d'une branche inclinée de la fissure critique plus courte, plus raide et se développant plus loin de l'appui ainsi qu'une ouverture réduite de cette fissure), la contribution de l'effet goujon devient presque négligéable (5% pour l'essai SC12b et 10% pour l'essai SC13b).

– L'armature transversale permet la transmission d'une partie non négligeable de l'effort tranchant (même si dans les spécimens étudiés le taux d'armature transversale est faible : $\rho_w = 0.063\%$). La contribution de ce MTET dépend principalement de l'allure de la fissure critique, et est particulièrement importante pour des fissures critiques dont la branche inclinée plus allongée intercepte un nombre maximum d'étriers (38% pour l'essai SC13b et 35% pour l'essai SC16b). Logiquement, sa contribution est réduit pour des fissures critiques présentant des branches inclinées moins allongées et plus raides (18% pour l'essai SC12b).

– La résistance résiduelle du béton à la traction a une contribution limitée dans les essais analysés (5% pour l'essai SC12b, 8% pour l'essai SC13b, inconnue pour l'essai SC16b). Ceci est principalement dû à l'ouverture conséquente des fissures, liée à la taille importante des éléments analysés.

– L'inclinaison de la bielle comprimée semble avoir un rôle négligeable dans le cas de ces essais, notamment pour les essais SC13b et SC16b. Cependant, pour l'essai SC12b sa contribution pourrait ne pas être négligeable, mais les mesures disponibles n'ont pas permis sa quantification.

– Ces essais ont permis de mettre en avant des différences importantes concernant la forme de la fissure critique (figure 3.5(b)) et sa cinématique (figure 3.4(b)). Ceci conduit à une activation très variée des différents MTET (figure 3.26). Toutefois, cette variabilité dans l'importance relative de chaque MTET ne semble pas avoir introduit des différences notables au niveau de la résistance des éléments (figure 3.2(f)). En effet, quand la participation de l'engrènement des granulats est limitée (à cause d'une fissure critique très ouverte et présentant une branche inclinée plus allongée), les contributions de l'effet goujon et de l'armature transversale augmentent. Dans le cas d'éléments sans armature transversale, la contribution directe de l'engrènement des granulats doit donc être prépondérante, car la contribution des étriers n'est plus possible, ce qui diminue également la rigidité de l'effet goujon (figure 3.22).

Tab. 3.5: Résultats de la quantification des contributions des différents modes de transmission de l'effort tranchant : valeurs et positions des forces calculées

	Forces verticales					
	SC12b		SC13b		SC16b	
	valeur [kN]	x [mm]	valeur [kN]	x [mm]	valeur [kN]	x [mm]
V_{agg}	-163	698	-68	850	-36	909
V_{sw}	-40	608	-59	679	-63	676
V_{res}	-11	363	-12	303	NA[a]	NA[a]
V_{dow}	-12	760	-16	950	-80	1050
V_{ch}	NA[a]	333	0[b]	247	0[b]	244
V_{tot}	226	1220	155	1220	179	1220
V_p	174.5		150.5		176	
	V_{tot}/V_p =1.29		V_{tot}/V_p =1.03		V_{tot}/V_p =1.02	
	Forces horizontales					
	SC12b		SC13b		SC16b	
	valeur [kN]	y [mm]	valeur [kN]	y [mm]	valeur [kN]	y [mm]
N_{agg}	160	160	68	167	45	152
N_{res}	-4	324	-1	359	NA[a]	NA[a]
N_s	-497	51	-260	49	-210	56
N_{ch}	341	369	193	384	165	387

a : pas de mesures disponibles pour permettre le calcul
b : négligé

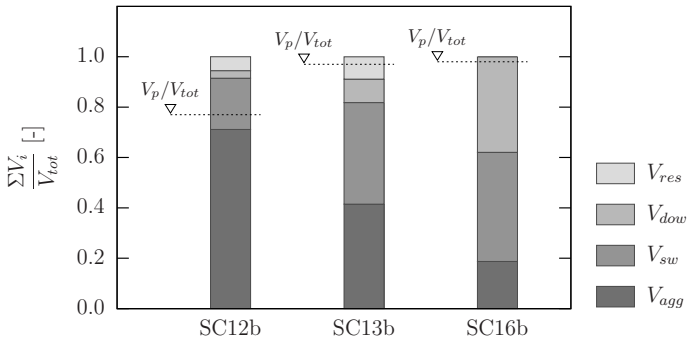


Fig. 3.26: Importance relative de chaque mode de transmission par rapport à l'effort tranchant total qui a été quantifié

3.4.8 Conclusions

Des essais d'effort tranchant ont été effectués sur des poutres en béton armé avec un faible taux d'armature transversale. Un travail de quantification des modes de transmission de l'effort tranchant (MTET) a été réalisé sur la base de la cinématique mesurée de la fissure critique ainsi qu'en utilisant les modèles physiques existants pour l'étude de chacun de ces MTET (engrènement des granulats, armature transversale, effet goujon, résistance résiduelle du béton à la traction, inclinaison de la bielle comprimée). Les conclusions principales concernant ce travail sont les suivantes :

1. La quantité d'effort tranchant transmise par chaque mode de transmission est fortement influencée par l'allure de la fissure critique et par sa cinématique, lesquelles peuvent varier sensiblement dans les éléments avec un faible contenu d'armature transversale. L'allure des fissures critiques obtenues dans les éléments analysés ne semble être influencée ni par le type de béton ni par la valeur du taux d'armature flexionnelle. La position des armatures transversales semble par contre pouvoir influencer la position de la branche inclinée centrale de la fissure critique. Dans ce sens, l'espacement entre les armatures transversales est également un paramètre important, qui mériterait d'être étudié par des essais supplémentaires.

2. La présence de la fissure critique, dans laquelle toutes les déformations se localisent juste avant la rupture, donne lieu à deux corps rigides distincts. Avant la rupture, la totalité de l'effort tranchant doit être transmise d'un corps rigide à l'autre, ce qui est possible uniquement à travers la fissure critique. L'intensité de l'effort transmis par chaque MTET peut être estimée avec précision sur la base de la cinématique de la fissure critique et en utilisant des modèles mécaniques décrivant la transmission locale des efforts.

3. Dans le cas des essais analysés, la quasi totalité de l'effort tranchant est transmise à l'appui par la contribution combinée de l'engrènement des granulats, de l'effet goujon et de l'armature transversale. La contribution des MTET restantes est pratiquement négligeable. Pour des éléments ayant d'autres géométries, certains autres MTET peuvent cependant devenir plus importants (comme par exemple la résistance résiduelle du béton à la traction pour d'éléments de petites dimensions ou la participation de la bielle de compression inclinée).

4. L'engrènement des granulats joue un rôle primordial dans la transmission de l'effort tranchant au travers des fissures critiques formées par une branche inclinée particulièrement raide et qui se développe sur une longueur réduite. Par contre, l'action de l'armature transversale et de l'effet goujon de l'armature flexionnelle devient déterminante pour des fissures critiques dont la branche inclinée est plus allongée. Malgré les deux différentes allures possibles pour la fissure critique, la somme des trois contributions principales (engrènement des granulats, armature transversale, effet goujon) reste relativement constante (pour les éléments ayant

les mêmes caractéristiques), donnant lieu à des résistances très similaires.

5. Pour des éléments sans armature transversale, bien que cela n'a pas pu être vérifié, la contribution de l'engrènement des granulats devrait devenir prépondérante. En effet, l'absence de l'armature transversale a le double effet d'annuler sa contribution directe et de diminuer la rigidité du système de transmission de l'effort tranchant par effet goujon de l'armature flexionnelle.

Chapitre 4

Comportement d'éléments courbes sans armature transversale soumis à l'effort tranchant

4.1 État de l'art et justification de l'étude

En juillet 2004, la tranchée couverte de Mitholz (Suisse) a dû être fermée au trafic suite à un éclatement étendu du béton d'enrobage (figure 4.1). La section de cette tranchée couverte ne disposait d'aucune armature transversale dans la partie supérieure de la voûte. Après la fermeture, des inspections ultérieures de l'ouvrage ont permis de détecter une fissure d'effort tranchant très étendue (figure 4.1(b)) qui s'était développée à partir de la zone d'éclatement du béton d'enrobage.

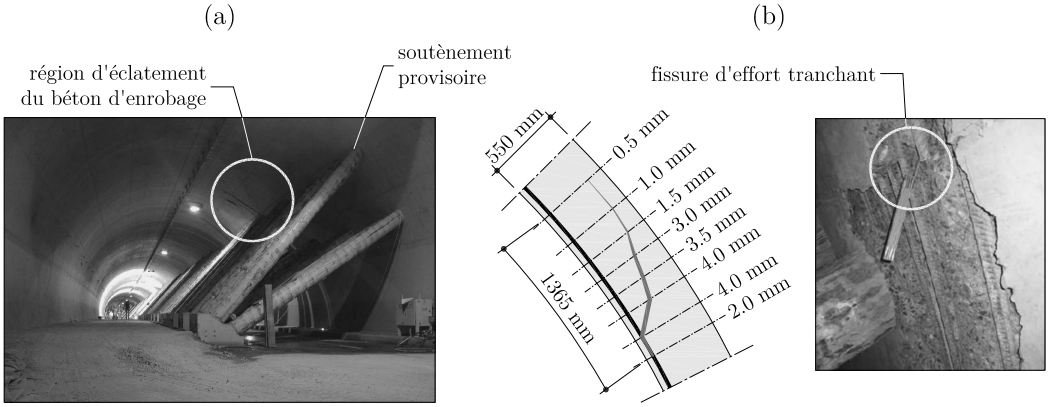


Fig. 4.1: Exemple de défaillance dans les éléments courbes. Tranchée couverte de Mitholz (Suisse) : **(a)** étayage provisoire de la tranchée couverte suite à un éclatement étendu du béton d'enrobage dû à un chargement asymétrique de la structure ; et **(b)** allure et ouverture de la fissure critique d'effort tranchant observée

L'endommagement de la structure a été déclenché par la mise en place d'un remblayage sur la voûte fortement asymétrique. La figure 4.2(a) montre que, dans le cas d'un chargement symétrique, la ligne de pression (dont la définition à été donnée dans le chapitre 1) correspond quasi parfaitement à l'axe moyen de la voûte (excentricités nulles) et donc la structure n'est principalement soumise qu'à des efforts normaux. La forme en voûte se révèle donc très adaptée pour ce cas de chargement. Au contraire, la figure 4.2(b) montre que des excentricités importantes de la ligne de pression existent dans le cas d'un chargement asymétrique, et que la structure est donc soumise à des moments de flexion et à des efforts tranchants importants (se référer à l'excentricité et à la pente de la ligne de pression par rapport à celle de l'axe moyen de la structure, voir chapitre 1). Dans le cas de la tranchée couverte de Mitholz (figure 4.1), l'éclatement du béton d'enrobage et la fissure d'effort tranchant ont été observés dans les zones où la valeur du moment de flexion et celle de l'effort tranchant étaient particulièrement importantes (figure 4.2(b)).

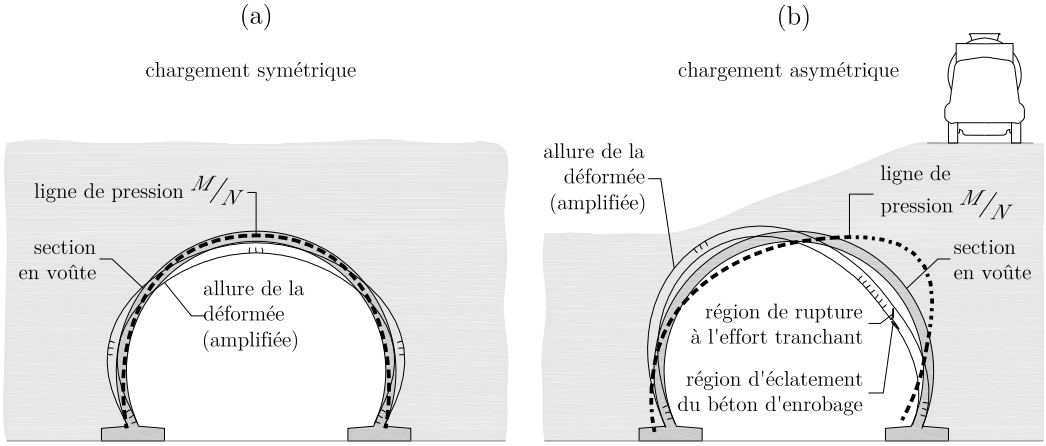


Fig. 4.2: Position de la ligne de pression dans une tranchée couverte en forme de voûte à faible profondeur, pour le cas : **(a)** d'un chargement symétrique ; et **(b)** d'un chargement asymétrique

Comme montré par la figure 1.4, des situations similaires d'éléments courbes en béton armé soumis à une combinaison de moments de flexion, d'effort tranchants et d'efforts normaux peuvent être trouvées dans plusieurs sortes de structures, comme par exemple : les ponts en arc, les silos et les structures submergées, les conduites et les tunnels ainsi que les voûtes et les coques.
Des recherches visant à étudier le comportement d'éléments courbes sans armature transversale soumis à la flexion pure ($V = 0$) et développant des forces de déviation (figure 4.3) ont été effectuées par différents auteurs [Fei74, Neu81, Int04, Fer10]. Ces travaux ont permis de mieux comprendre les mécanismes reliés aux ruptures par éclatement du béton d'enrobage (se produisant sur des éléments ayant des rayons de courbure positifs, $R_s > 0$). Ce type de rupture n'est pas étudié dans le cadre de cette thèse, et les méthodes de calcul proposées par les auteurs des recherche existantes, qui préconisent que l'éclatement intervient quand les contraintes de traction radiales agissant

sur le béton d'enrobage atteignent la résistance à la traction, peuvent être consultées ailleurs [Fei74, Neu81, Int04, Fer10].

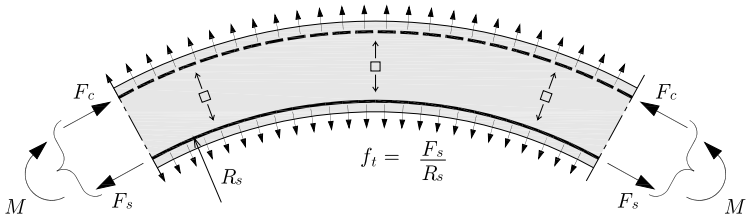


Fig. 4.3: Sollicitation d'éléments courbes à la flexion pure : développement des forces de déviation au niveau de la membrure comprimée et de celle tendue

4.1.1 Interaction moment de flexion / effort tranchant

Malgré les limitations de cette approche pour l'étude de structures en béton armé, lesquelles seront discutées plus loin, l'interaction moment de flexion / effort tranchant dans un élément courbe peut être mise en avant par un calcul de l'état élastique des contraintes à la fibre centrale de la section de l'élément (figure 4.4(a)). Il peut être ainsi considéré que la rupture de l'élément se produise quand la contrainte principale (σ_1) atteint la résistance à la traction du béton (f_{ctm}) :

$$\sigma_1 = f_{ctm} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{4.1}$$

où il peut être considéré que, à la mi-hauteur de la section non fissurée (où la contrainte principale σ_1 est maximale) et en absence d'un effort normal :

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2}\frac{V}{b\,h} \quad ; \quad \sigma_x = 0 \quad ; \quad \text{et} \quad \sigma_y = \frac{3}{2}\frac{M}{b\,h\,R} \tag{4.2}$$

où τ_{xy} est la contrainte de cisaillement, σ_x la contrainte tangentielle, σ_y la contrainte radiale, V l'effort tranchant, M le moment de flexion, b l'épaisseur et h la hauteur de l'élément et R le rayon de courbure de l'élément mesuré au centre de la section ($h \ll R$). En regroupant les équations 4.1 et 4.2, on parvient à mettre en évidence la relation entre l'effort tranchant (V) et le moment de flexion (M) dans les éléments courbes (où la courbure est définie par $1/R$) :

$$V = b\,h\sqrt{\left(\frac{2}{3}\,f_{ctm} - \frac{M}{2\,b\,h\,R}\right)^2 - \left(\frac{M}{2\,b\,h\,R}\right)^2} \tag{4.3}$$

L'allure de la courbe définie par l'équation 4.3 est présentée à la figure 4.4(b). Elle met en avant le fait que la résistance à l'effort tranchant est fortement influencée par la présence des forces de déviation (décrites au travers du rapport M/R) découlant de l'action du moment de flexion sur les différents éléments courbes. Il faut cependant souligner que les résultats de cette analyse élastique doivent être interprétés uniquement

de manière qualitative et que cette approche n'est pas applicable pour le calcul d'éléments en béton armé fissurés. En effet, dans les éléments fissurés, différents modes de rupture peuvent intervenir réduisant sensiblement la résistance des éléments en comparaison à celle prédite par l'analyse élastique (équation 4.3). Ceci est mis en avant par les courbes trait-tillées de la figure 4.4(b), qui permettent de présenter les considérations suivantes :

- la résistance d'éléments droits (sans courbure, $R = \infty$) soumis à la flexion pure ($V = 0$) est déterminée par la résistance à la flexion (M_{flex}). Par contre, dans le cas d'éléments courbes soumis à la flexion pure ($V = 0$), des contraintes supplémentaires se développent dans l'âme des éléments en raison de la courbure de l'armature flexionnelle et de la membrure comprimée. Les figures 4.5(a) à 4.5(c) montrent respectivement les contraintes de compression qui se développent dans les éléments avec une courbure négative ($R < 0$), les contraintes nulles dans les éléments droits ($R = \infty$) et celles de traction qui se développent dans les éléments avec une courbure positive ($R > 0$). Dans ce dernier cas particulier, et à cause des contraintes de traction agissant dans l'âme, une rupture par éclatement du béton d'enrobage peut se produire (se référer au demainee (e) de la figure 4.4(b) et au mode de rupture correspondant de la figure 4.4(e)) avant que la résistance à la flexion ne soit atteinte. Cette problématique n'est toutefois pas observée dans le cas d'éléments avec une courbure négative, pour lesquels la résistance à la flexion peut généralement être atteinte.
- La présence d'un effort tranchant et la conséquente activation de l'effet goujon de l'armature flexionnelle (voir chapitres 2 et 3), peut anticiper ultérieurement les ruptures par éclatement du béton d'enrobage. En effet, il peut augmenter les contraintes de traction transversales agissant sur le béton d'enrobage, et conduire à son éclatement prématuré.
- La résistance à l'effort tranchant d'éléments courbes (pour lesquels $M/R \neq 0$) peut varier de façon conséquente par rapport à celle d'éléments droits ($M/R = 0$). En effet, pour des éléments avec une courbure négative, la résistance à l'effort tranchant a tendance à augmenter (se référer au domaine (c) de la figure 4.4(b) et au mode de rupture correspondant montré à la figure 4.4(c)). Au contraire, pour des éléments avec un rayon de courbure positif, la résistance à l'effort tranchant a tendance à diminuer (se référer au domaine (d) de la figure 4.4(b) et au mode de rupture correspondant de la figure 4.4(d)). Ces variations de la résistance s'expliquent par le fait que les contraintes radiales dans l'âme des éléments (figure 4.5) s'additionnent, de manière favorable ou pas selon le type de courbure, aux contraintes de traction dues à l'action des modes de transmission de l'effort tranchant (effet porte-à-faux, engrènement des granulats et effet goujon, voir chapitres 2 et 3).
- L'existence d'une zone de transition entre des ruptures à l'effort tranchant (figure 4.4(d)) et des ruptures par éclatement du béton d'enrobage (figure 4.4(e)) est aussi mise en avant par la figure 4.4(b).

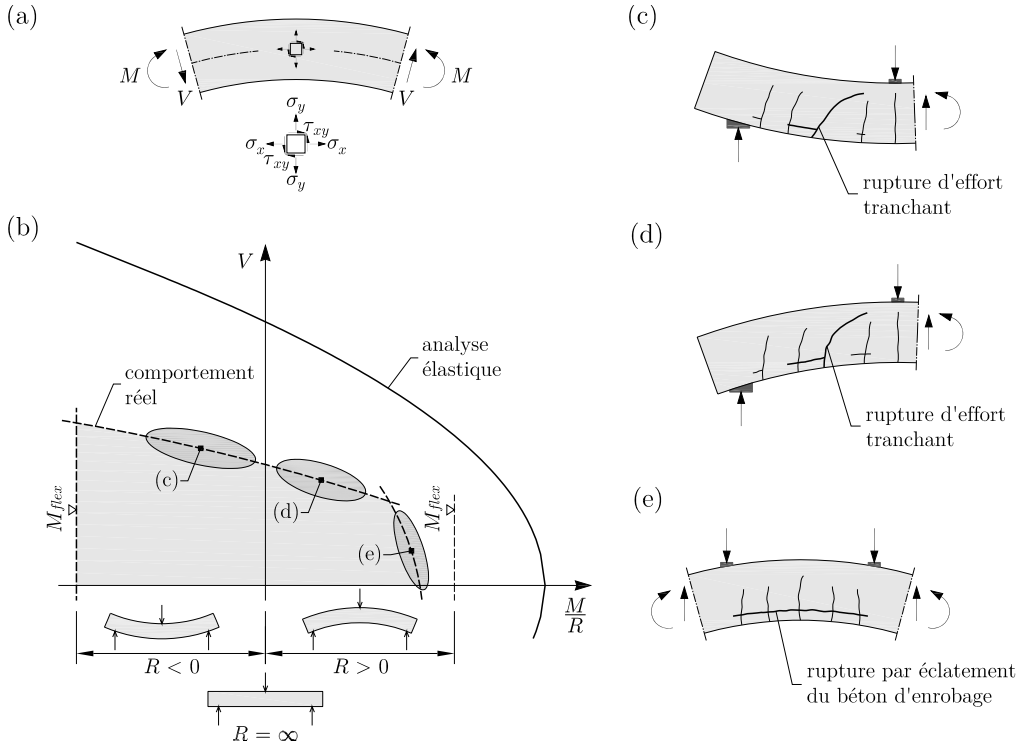


Fig. 4.4: Étude de l'interaction moment de flexion / effort tranchant dans les éléments courbes en béton armé : **(a)** contraintes élastiques agissant à la fibre centrale de la section ; **(b)** analyse élastique et comportement réel fissuré des éléments ; **(c)** rupture d'effort tranchant d'éléments avec une courbure négative ; **(d)** rupture d'effort tranchant d'éléments avec une courbure positive ; et **(e)** rupture par éclatement du béton d'enrobage d'éléments avec une courbure positive

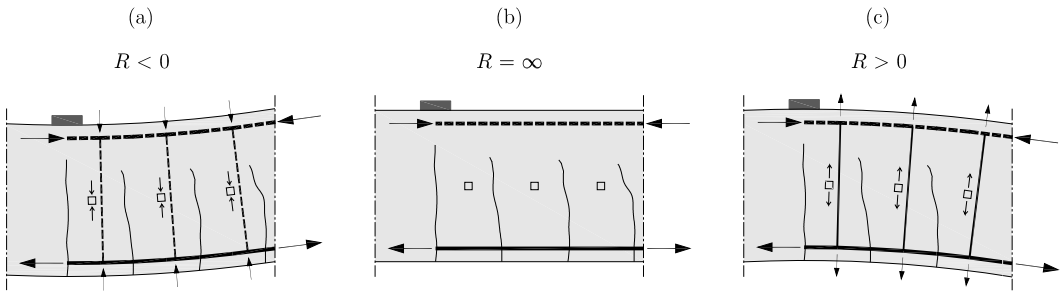


Fig. 4.5: Contraintes radiales aggissant dans l'âme des éléments : **(a)** avec une courbure négative (contraintes de compression) ; **(b)** sans courbure (contraintes nulles) ; et **(c)** avec une courbure positive (contraintes de traction)

4.1.2 Etat de l'art

L'effet de l'action combinée d'un moment de flexion (et donc des forces de déviation) et d'un effort tranchant sur les éléments courbes n'a pas encore été étudié de façon étendue. Toutefois, des travaux dans ce sens ont été effectuées par :

– Kani [Kan79], qui a étudié l'influence de la déviation de la membrure comprimée sur la résistance d'éléments en béton armé non-prismatiques soumis à la flexion pure. La forme des spécimens analysés par cet auteur ainsi que le type de rupture obtenue sont montrés à la figure 4.6(a). Le modèle bielles-et-tirants de la figure 4.6(b) montre que la déviation de la membrure comprimée introduit, dans l'âme des spécimens, un état de contraintes similaire à celui des spécimens prismatiques soumis à l'effort tranchant. Par conséquent, malgré la sollicitation des spécimens à la flexion pure, ces derniers ont été concernés par le développement de fissures inclinées pouvant éventuellement conduire à une rupture par effort tranchant. Une analyse de ces spécimens est présentée à la section 4.3.3.

– Intichar et al. [Int04], qui ont récemment conduit une campagne d'essais se concentrant particulièrement sur l'étude du comportement d'éléments courbes soumis à la flexion pure (flexion quatre points) afin d'étudier le phénomène d'éclatement du béton d'enrobage. Cependant, un spécimen supplémentaire a été utilisé pour un essai de flexion trois points, introduisant donc une interaction moment de flexion / effort tranchant. La géométrie du spécimen, qui est montrée à la figure 4.6(c), met en avant la présence d'une armature transversale dans la zone comprimée et à proximité du point d'application de la charge. Malgré la présence d'un effort tranchant et la formation de fissures inclinées conséquentes associées (figures 4.6(c-d)), une rupture par éclatement du béton d'enrobage a également été observée lors de cet essai (figure 4.6(c)).

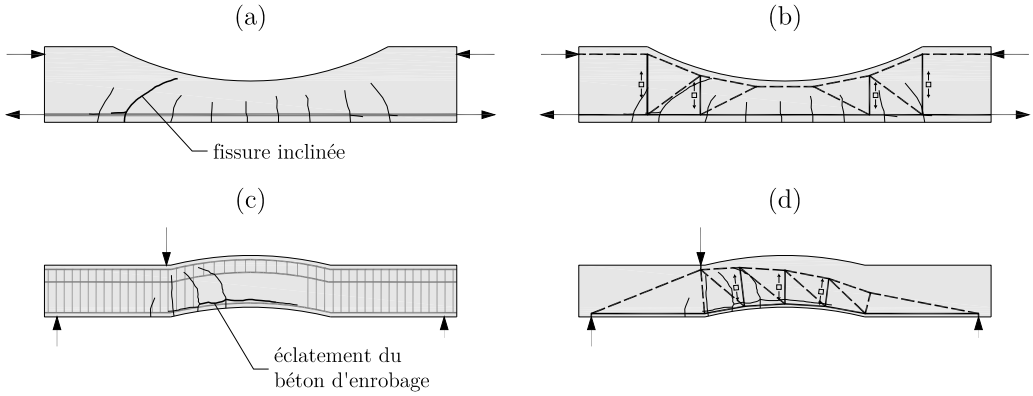


Fig. 4.6: Essais existants dans la littérature avec une interaction moment de flexion / effort tranchant. Géométrie, type de rupture observé et état de contraintes dans l'âme des spécimens : **(a,b)** non-prismatiques analysés par Kani [Kan79] ; **(c,d)** analysés par Intichar et al. [Int04]

Malgré l'intérêt de la problématique de l'interaction entre un moment de flexion (M) et un effort tranchant (V) sur des éléments courbes (figure 1.4), les données expérimentales actuellement disponibles dans la littérature demeurent clairement insuffisantes pour l'établissement de modèles de calcul appropriés. Afin de disposer de ces données expérimentales, une campagne d'essais a été entreprise sur des éléments courbes à grande échelle avec des taux d'armature flexionnelle et des rayons de courbure variables. Cette

campagne d'essais, qui est présentée dans la section 4.2, a permis d'étudier l'effet des contraintes radiales introduites par la courbure des éléments (figures 4.5(a) et 4.5(c)) en comparaison au comportement des éléments sans courbure (figure 4.5(b)).

4.2 Campagne d'essais

4.2.1 Spécimens de la série d'essais

La série d'essai comprenait neuf spécimens à grande échelle (avec une hauteur de la section $h = 400$ mm et une épaisseur $b = 300$ mm) sans armature transversale. Les propriétés des spécimens, fabriqués avec un béton à résistance normale (avec une résistance moyenne à la compression du béton f_{cm} comprise entre 41.2 et 45.9 MPa et un diamètre maximal des granulats $d_g = 16$ mm) et les résultats obtenus dans cette série d'essais sont décrits de manière détaillée dans le rapport d'essai [Cam12]. Un résumé des caractéristiques principales des spécimens est présenté à la figure 4.7. Les deux paramètres étudiés au travers de cette série d'essais étaient le rayon de courbure (R_{avg}, mesuré à l'axe moyen de la section) et le taux d'armature flexionnelle (ρ). La variation du rayon de courbure R_{avg} implique également une variation du rayon de courbure de l'armature flexionnelle (R_s). Ce dernier peut être calculé selon l'équation 4.4 où d est la hauteur statique de l'armature flexionnelle.

$$R_s = R_{avg} + \frac{h}{2} - d \tag{4.4}$$

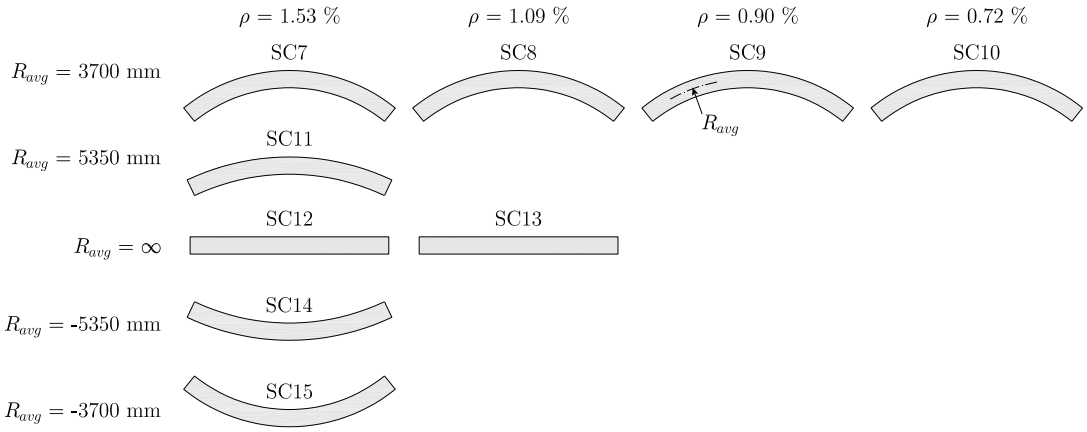


Fig. 4.7: Spécimens de la série d'essais : valeurs du rayon de courbure et du taux d'armature flexionnelle

Une première série de cinq spécimens a permis d'étudier l'effet du rayon de courbure avec un taux d'armature flexionnelle constant ($\rho = 1.53\%$, obtenu avec trois barres d'armature d'un diamètre $d_b = 26$ mm). La valeur du rayon de courbure était respectivement de $R_{avg} = 3700$ mm pour les spécimen SC7, 5350 mm pour le spécimen SC11, -3700 mm pour le spécimen SC14 et -5350 mm pour le spécimen SC15. Un spécimen droit (spécimen SC12, $\rho = 1.53\%$, $R_{avg} = \infty$) a été utilisé comme référence afin d'apprécier l'effet

du rayon de courbure sur le comportement des éléments. L'effet d'un rayon de courbure positif ($R_{avg} = 3700$ mm) a aussi été étudié avec le spécimen SC8 ayant un taux d'armature flexionnelle inférieur ($\rho = 1.09\%$, $d_b = 22$ mm), en comparaison à un spécimen droit de référence (spécimen SC13, $\rho = 1.09\%$, $R_{avg} = \infty$). Il faut souligner que les spécimens SC12 et SC13 sont les mêmes qui ont déjà été présentés dans le chapitre 3. Les essais pris en compte dans ce cas sont bien évidemment ceux effectués du côté des spécimens sans armature transversale (essais SC12a et SC13a). Une deuxième série de quatre spécimens a permis d'étudier l'effet du taux d'armature flexionnelle (ρ) pour un rayon de courbure constant ($R_{avg} = 3700$ mm). Le taux d'armature valait respectivement $\rho = 1.53\%$ ($d_b = 26$ mm) pour le spécimen SC7, 1.09% ($d_b = 22$ mm) pour le spécimen SC8, 0.90% ($d_b = 20$ mm) pour le spécimen SC9 et 0.72% ($d_b = 18$ mm) pour le spécimen SC10. Il faut souligner que ces valeurs du taux d'armature, ainsi que la géométrie des spécimens SC7 à SC10, sont identiques à celles des spécimens ECP1 à ECP4 composant la série d'essais effectuée par Fernández et al. [Fer10] pour l'étude du phénomène d'éclatement du béton d'enrobage dans les éléments courbes soumis à la flexion pure (flexion quatre points). Pour tous les spécimens, l'épaisseur du béton d'enrobage a été fixée à 40 mm, ce qui signifie que la hauteur statique nominale (d_{nom}) était comprise entre 347 mm (pour les spécimens avec $\rho = 1.53\%$) et 351 mm (pour le spécimen SC10 avec $\rho = 0.72\%$).
La figure 4.8(a) met en avant la géométrie des spécimens ainsi que de leur armature (exemple fait sur la base d'un spécimen avec une courbure positive, d'avantages d'informations sont disponibles ailleurs [Cam12]). Des étriers ont été placés dans les zones d'ancrage de l'armature flexionnelle afin d'éviter toute rupture non désirée à l'extérieur de la zone étudiée. L'armature comprimée, identique pour tous les spécimens, était composée de deux barres de diamètre 12 mm. Dans la zone centrale des spécimens, des armatures transversales (perpendicularaires à l'armature flexionnelle) d'un diamètre de 16 mm ont aussi été placées au niveau de l'armature flexionnelle à un intervalle de 150 mm. Ces dernières, representent les armatures longitudinales typiquement existantes dans des structures en béton armé au comportement bi-directionnel (telles que, par exemple, des tranchées couvertes, voir figure 4.2).
Le tableau 4.1 résume les caractéristiques principales des spécimens : les rayons de courbure R_{avg} et R_s, l'épaisseur (b) et la hauteur (h) effectives de la section, la hauteur statique de l'armature flexionnelle (d), le diamètre de l'armature flexionnelle (d_b) ainsi que la valeur effective du taux d'armature flexionnelle (ρ). Le tableau 4.2 résume les propriétés principales des matériaux : le diamètre maximal des granulats (d_g), les résistances moyennes à la compression (f_{cm}) et à la traction (f_{ctm}) du béton ainsi que la limite d'écoulement de l'armature flexionnelle (f_y). Par simplicité, dans la suite du chapitre, les références aux spécimens seront faites en utilisant la valeur nominale de leur taux d'armature flexionnelle ($\rho = 1.53\%$, 1.09%, 0.90% et 0.72%).

Tab. 4.1: Caractéristiques des spécimens de la série d'essais

spécimen	R_{avg} [mm]	R_s [mm]	b [mm]	h [mm]	d [mm]	d_b [mm]	ρ^a [%]
SC7	3700	3555	301	398	344	26	1.54
SC8	3700	3552	303	400	348	22	1.08
SC9	3700	3550	300	400	350	20	0.90
SC10	3700	3550	300	400	350	18	0.73
SC11	5350	5208	303	400	342	26	1.54
SC12a	∞	∞	302	405	354	26	1.49
SC13a	∞	∞	303	403	354	22	1.06
SC14	-5350	-5496	302	398	345	26	1.53
SC15	-3700	-3846	300	398	345	26	1.54

a : valeur effective

Tab. 4.2: Caractéristiques des matériaux de la série d'essais

spécimen	d_g [mm]	$f_{cm}{}^a$ [Mpa]	$f_{ctm}{}^b$ [Mpa]	f_y [Mpa]
SC7	16	45.6	2.93	580
SC8	16	45.7	2.93	580
SC9	16	42.9	3.23	533
SC10	16	42.8	3.23	559
SC11	16	45.9	2.93	580
SC12a	16	41.2	2.93	580
SC13a	16	43.0	2.93	580
SC14	16	45.2	2.73	580
SC15	16	45.2	2.73	580

a : mesurée sur cylindre le jour de l'essai
b : mesurée sur cylindre à l'âge de 28 jours

Le bâti de charge est présenté à la figure 4.8(b). Les spécimens étaient soumis à une flexion trois points, avec une longueur de la travée $L = 2440$ mm. Le rapport entre la longueur de la portée d'effort tranchant ($a = L/2 = 1220$ mm) et la hauteur statique nominale de l'armature ($d_{nom} \approx 348$ mm) était égal à 3.51 pour tous les spécimens. Une charge ponctuelle $Q = 2\,V$ (V étant l'effort tranchant à transmettre à chaque appui) était appliquée au centre du spécimen qui était le point fixe horizontal du banc d'essai. Les dimensions de la plaque métallique d'introduction de la charge placée directement sous le vérin hydraulique étaient de 300 x 80 x 25 mm. Dans la plupart des essais, les plaques d'appuis permettant les rotations et les déplacements horizontaux des spécimens, avaient des dimensions de 300 x 160 x 20 mm (figure 4.8(b)). Par contre, leur dimension était de 300 x 200 x 40 mm dans le cas des essais SC12a et SC13a.
Lors des essais, plusieurs mesures ont été effectuées pour suivre le comportement des spécimens [Cam12]. Des capteurs inductifs ont permis de mesurer les déplacements verticaux (figure 4.8(b)) et des jauges oméga ont permis de mesurer les déformations le long de l'armature flexionnelle. Des mesures discontinues ont également été effectuées manuellement avec un déformètre [Cam11c] sur la surface des spécimens (voir section 3.3 et annexe A). Des paliers de mesure ont été effectués à des niveaux de charge sélectionnés lors du chargement. Ces mesures ont ainsi permis le suivi de la cinématique des

fissures, pour laquelle d'avantage de détail sont donnés dans le rapport d'essai [Cam12].

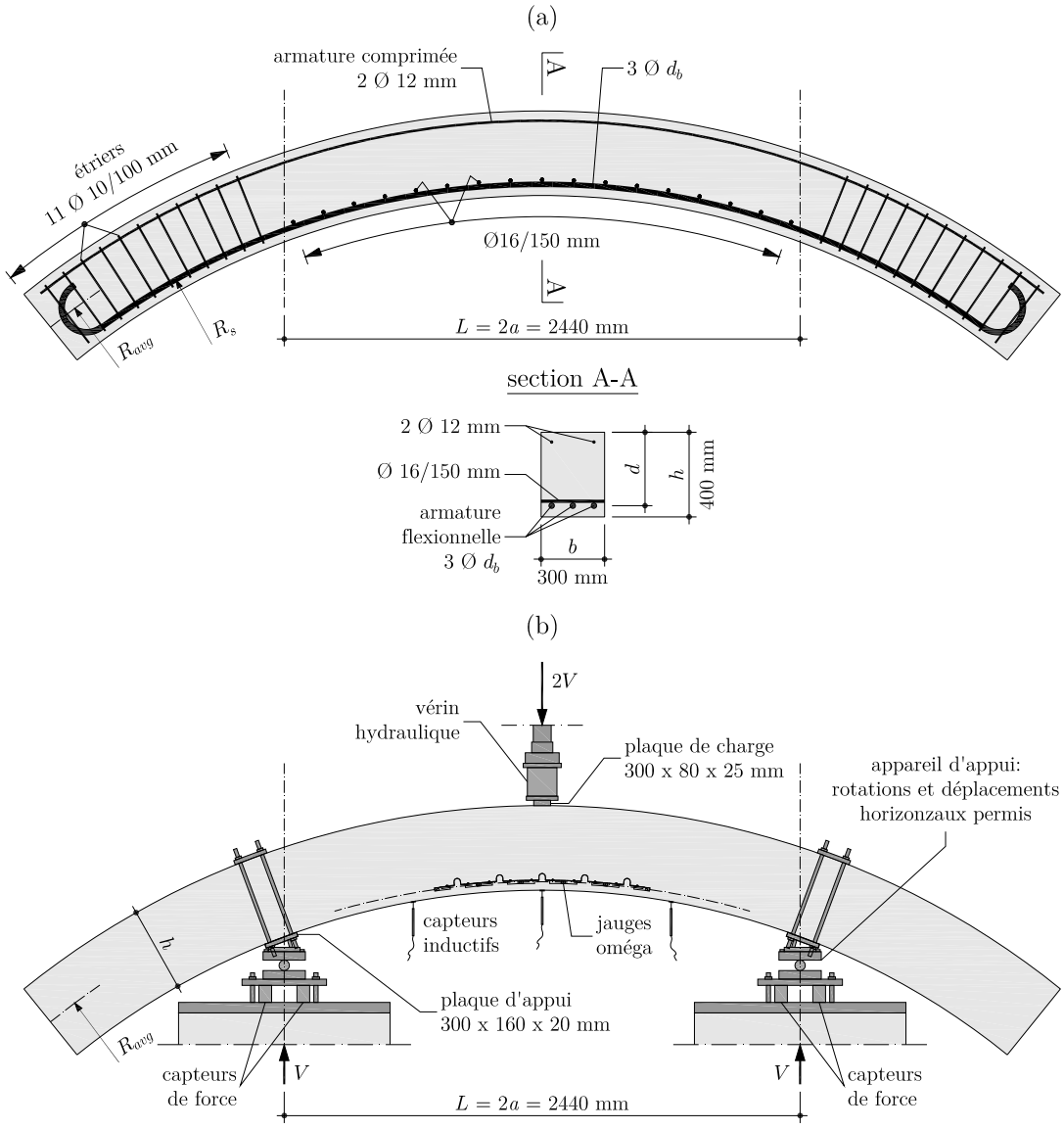


Fig. 4.8: Caractéristiques de la série d'essais : **(a)** géométrie des spécimens (exemple d'un spécimen avec une courbure positive) et détail de leur armature ; et **(b)** banc d'essai

4.2.2 Discussion des résultats

Les figures 4.9(a-c) montrent le comportement des neuf spécimens par la relation entre l'effort tranchant appliqué (valeur normalisée $V/\left(b\,d\,\sqrt{f_{cm}}\right)$) et le déplacement vertical mesuré à mi-travée (δ_v). Les spécimens ont été regroupés selon leurs caractéristiques : la figure 4.9(a) montre le comportement des cinq spécimens avec un taux d'armature $\rho = 1.53\%$ et un rayon de courbure variable, la figure 4.9(b) celui des spécimens avec un taux d'armature $\rho = 1.09\%$ et un rayon de courbure variable et la figure 4.9(c) celui des

spécimens avec un rayon de courbure constant $R_{avg} = 3700$ mm et un taux d'armature variable.
Les résistances maximales normalisées des spécimens ($V^*_{max} = V_{max} / \left(b\, d\, \sqrt{f_{cm}}\right)$) ont aussi été représentées en fonction du rapport a/R_s entre la longueur de la portée d'effort tranchant (a) et le rayon de courbure de l'armature flexionnelle (R_s). Ceci a été fait dans les figures 4.10(a-c) respectivement pour les spécimens avec un taux d'armature constant $\rho = 1.53\%$ et $\rho = 1.09\%$ et un rayon de courbure variable ainsi que pour les spécimens avec un rayon de courbure constant $R_{avg} = 3700$ mm et un taux d'armature variable.
Les résistances obtenues (V_{max}) sont résumées dans le tableau 4.3, avec les résistances normalisées (V^*_{max}) et les déformations verticales maximales ($\delta_{v,max}$) mesurées avant la rupture. Ce tableau indique également les rapports entre la résistance normalisée de chaque spécimen courbe (V^*_{max}) et celle de l'essai de référence effectué sur le spécimen droit avec le même taux d'armature flexionnelle ($V^*_{max(R=\infty)}$). De plus, le tableau résume les rapports entre la résistance normalisée (V^*_{max}) des spécimens avec un rayon de courbure $R_{avg} = 3700$ mm et un taux d'armature flexionnelle variable et celle de l'essai de référence avec un taux d'armature flexionnelle $\rho = 1.53\%$ ($V^*_{max(\rho=1.53)}$).
Les figures 4.11 et 4.12 montrent l'état de la fissuration observé pour chaque spécimen respectivement au dernier palier de mesures au déformètre avant la rupture et à la rupture des spécimens. Pour simplifier la comparaison des résultats d'essais, toutes le ruptures ont été représentées du même côté par symétrie axiale.

Tab. 4.3: Résultats de la série d'essais

spécimen	R_{avg} [mm]	ρ [%]	$\delta_{v,max}$ [mm]	V_{max} [kN]	V^*_{max} [a] $[\sqrt{\text{Mpa}}]$	$\frac{V^*_{max}}{V^*_{max(R=\infty)}}$ [-]	$\frac{V^*_{max}}{V^*_{max(\rho=1.53)}}$ [-]
SC7	3700	1.54	5.4	130.0	0.186	0.86	1.00
SC8	3700	1.08	7.1	131.0	0.184	0.94	0.99
SC9	3700	0.90	7.4	116.5	0.169	0.78	0.91
SC10	3700	0.73	15.1	116.5	0.170	0.79	0.91
SC11	5350	1.54	1.5	120.0	0.171	0.79	-
SC12a	∞	1.49	6.2	148.5	0.216	-	-
SC13a	∞	1.06	6.5	137.0	0.195	-	-
SC14	-5350	1.53	2.8	154.0	0.220	1.02	-
SC15	-3700	1.54	12.6	166.5	0.239	1.11	-

a : $V^*_{max} = \dfrac{V_{max}}{b\, d\, \sqrt{f_{cm}}}$

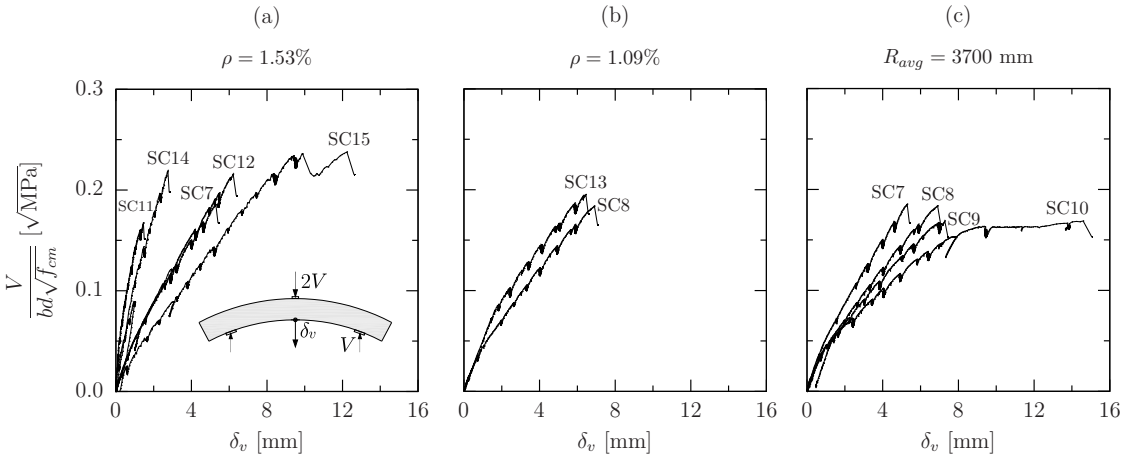


Fig. 4.9: Résultats de la série d'essais. Relations entre l'effort tranchant appliqué et la déformation verticale mesurée à mi-travée pour : **(a)** les spécimens avec un taux d'armature constant ($\rho = 1.53\%$) et un rayon de courbure variable ; **(b)** les spécimens avec un taux d'armature constant ($\rho = 1.09\%$) et un rayon de courbure variable ; et **(c)** les spécimens avec un rayon de courbure constant ($R_{avg} = 3700$ mm) et un taux d'armature variable

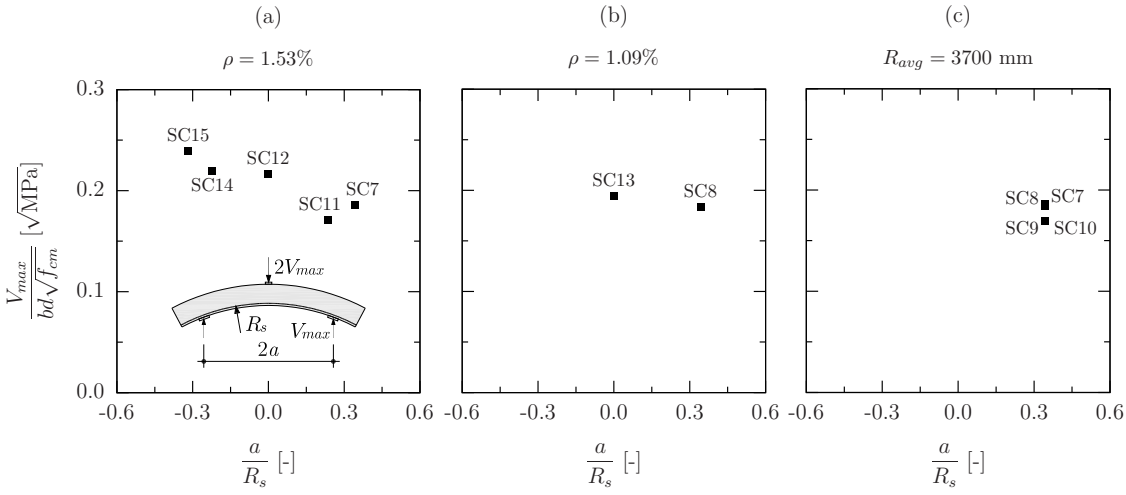


Fig. 4.10: Résultats de la série d'essais. Résistances à l'effort tranchant normalisées des spécimens en fonction du rapport entre la portée d'effort tranchant et le rayon de courbure de l'armature flexionnelle pour : **(a)** les spécimens avec un taux d'armature constant ($\rho = 1.53\%$) et un rayon de courbure variable ; **(b)** les spécimens avec un taux d'armature constant ($\rho = 1.09\%$) et un rayon de courbure variable ; et **(c)** les spécimens avec un rayon de courbure constant ($R_{avg} = 3700$ mm) et un taux d'armature variable

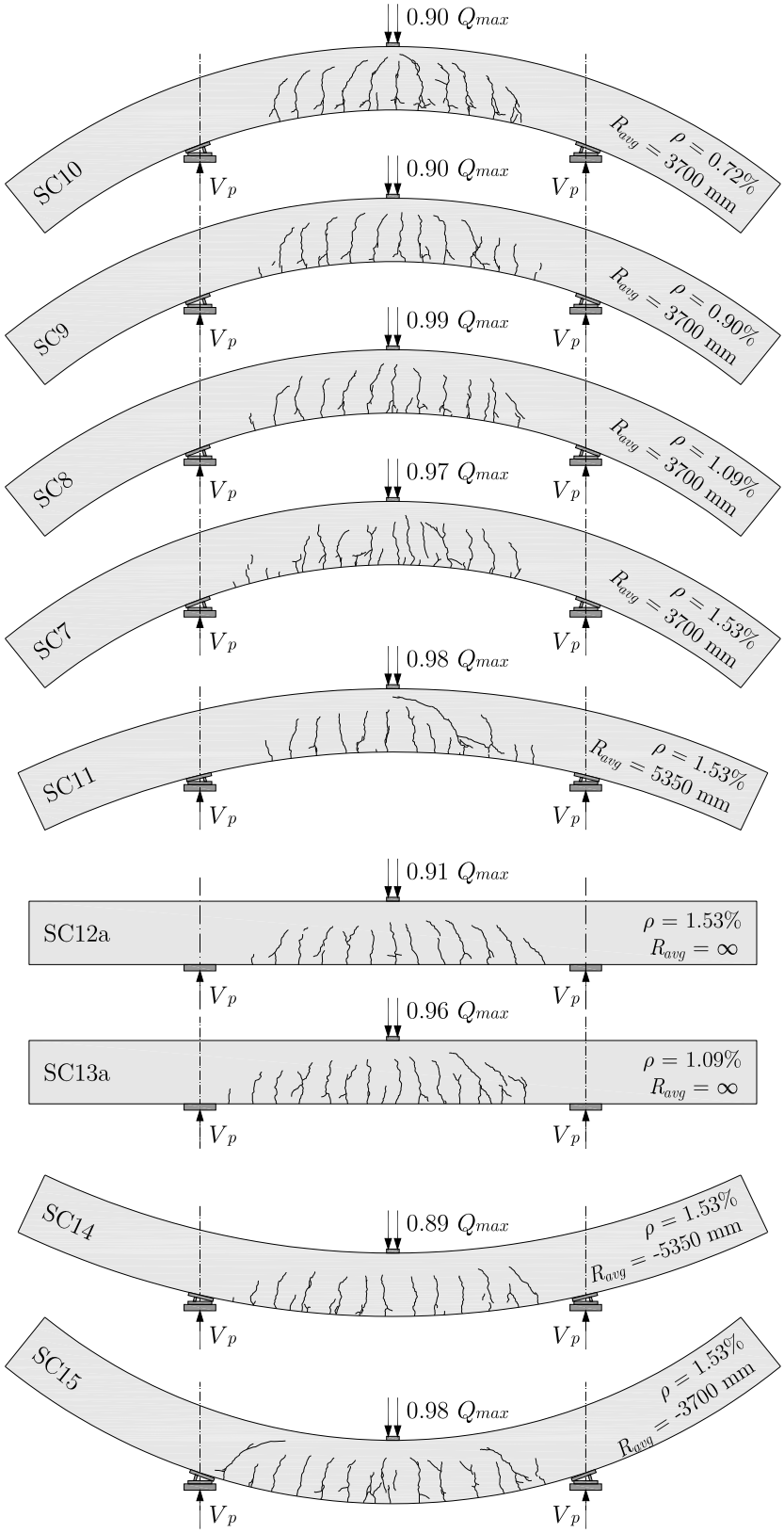


Fig. 4.11: Résultats de la série d'essais : fissuration observée au dernier palier des mesures au déformètre avant la rupture des spécimens (toutes les ruptures ont été représentées du même côté par symétrie axiale)

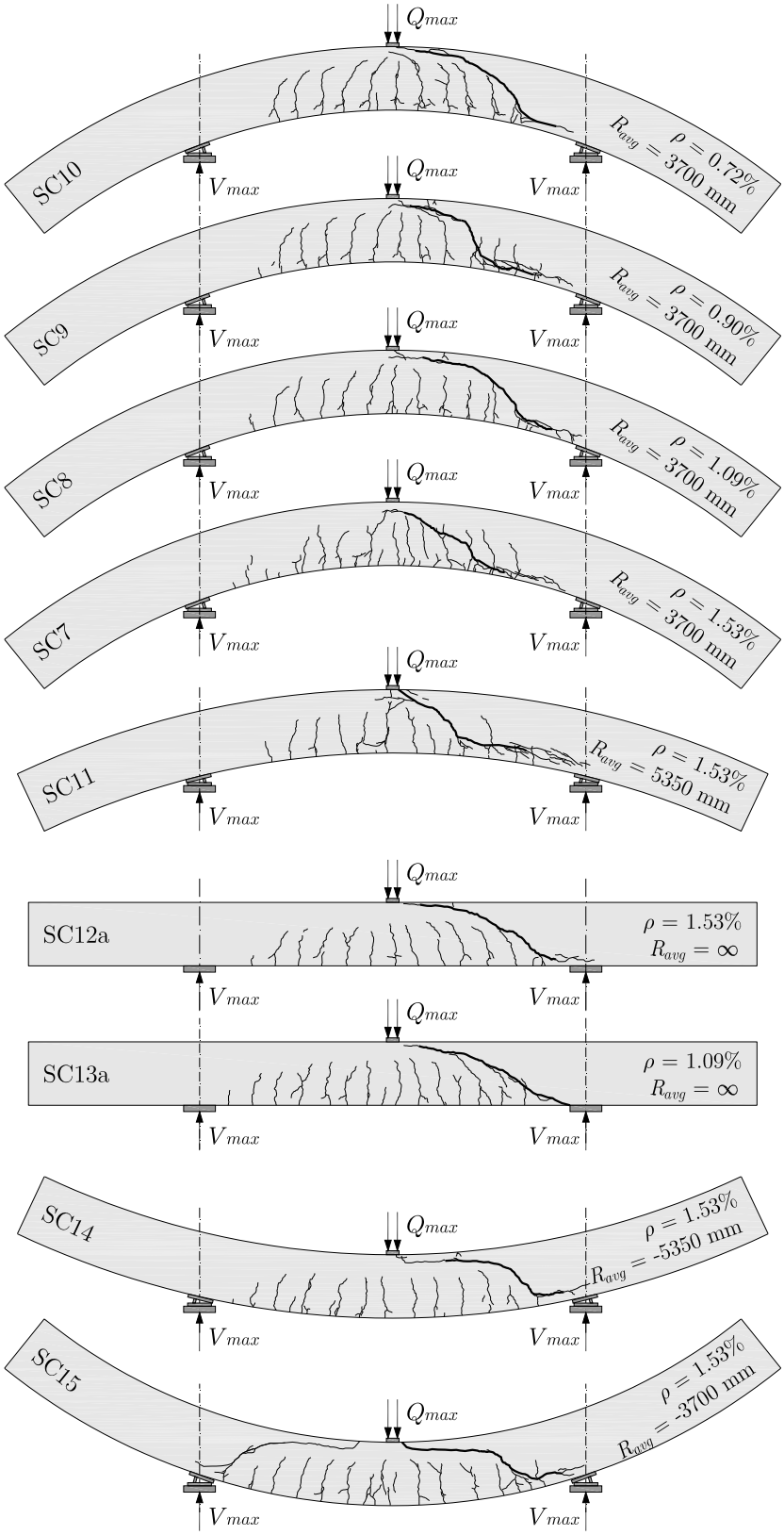


Fig. 4.12: Résultats de la série d'essais : fissuration observée à la rupture des spécimens (toutes les ruptures ont été représentées du même côté par symétrie axiale)

Sur la base des résultats obtenus, les considérations suivantes peuvent être faites :

- toutes les ruptures se sont produites de manière fragile avec la formation d'une fissure typique d'effort tranchant (figures 4.9(a-c) et 4.12). Toutefois, pour le spécimen SC10 (avec le taux d'armature le plus faible $\rho = 0.72\%$), un début de plateau plastique a pu être obsérvé.
- Après la rupture, l'allure de la fissure critique montre, dans plusieurs spécimens, une branche de délamination longeant l'armature flexionnelle. La longueur de cette branche de délamination est particulièrement prononcée pour les spécimens ayant une courbure positive (SC7 à SC11). Dans le cas de ces essais, de nombreuses fissures longeant l'armature flexionnelle peuvent être observées (figure 4.12). Pour les spécimens SC7 à SC10, elles étaient déjà bien développées avant la rupture (figure 4.11), contrairement au spécimens SC11 (ayant une courbure inférieure) dans lequel elles étaient moins prononcées. Pour les spécimens SC12 à SC15, la présence de ces fissures est moins évidente, même au moment de la rupture. Les fissures longeant l'armature flexionnelle peuvent être ainsi mises en relation avec la courbure des éléments : si elle donne lieu à la formation de contraintes de traction dans l'âme des spécimens (ce qui est le cas pour des rayons de courbure positifs, voir figure 4.5(c)) la propagation de ces fissures est plus prononcée.
- Concernant l'allure de la fissure critique, une influence claire de la courbure des éléments ne peut pas être observée directement. En particulier, la position de la branche inclinée dans l'âme des spécimens est très variable (se référer en particulier aux spécimens SC7 à SC11, voir figure 4.12). Cependant, il semble que cette branche inclinée ait tendance à se développer plus à proximité des appuis dans le cas d'une courbure négative (spécimens SC14 et SC15, voir figure 4.12), donnant donc lieu à une branche de délamination le long de l'armature flexionnelle plus courte. Ceci peut éventuellement s'expliquer par le fait que, dans le cas d'une courbure négative, les contraintes de compression qui se développent dans l'âme (figure 4.5(a)) ont comme effet de limiter l'ouverture des fissures, permettant ainsi la formation d'un nombre de fissures plus important avant que les déformations se localisent dans la fissure critique. Au contraire, les contraintes de traction qui se développent dans le cas d'une courbure positive (figure 4.5(c)) et qui accentuent l'ouverture des fissures, ont comme effet d'accélérer la localisation des déformations et donc le développement de la fissure critique. Ceci est mis en avant par la figure 4.11, dans laquelle il est assez évident que la largeur de la zone dans laquelle les spécimens sont fissurés augmente avec la diminution de la courbure (ce qui est bien visible en comparant les spécimens SC7 et SC15).
- L'effet de la courbure des éléments sur leur résistance à l'effort tranchant est mis en avant très clairement à la figure 4.10(a) ainsi que par les rapports $V^*_{max}/V^*_{max(R=\infty)}$ résumés dans le tableau 4.3. Ainsi, une augmentation de la résistance apparaît pour les spécimens avec une courbure négative (augmentation de 2% pour l'essai SC14 et de 11% pour l'essai SC15) et une diminution de la résistance pour ceux avec une

courbure positive (14% pour l'essai SC7 et 21% pour l'essai SC11) en comparaison avec le spécimen droit de référence avec le même taux d'armature flexionnelle (SC12a, $R = \infty$ et $\rho = 1.53\%$). La même tendence, toutefois plus nuancée, peut être observée pour les spécimens avec un taux d'armature flexionnelle $\rho = 1.09\%$ (SC8 et SC13a, voir figure 4.10(b) et tableau 4.3).

– La figure 4.9(c) montre que, pour les spécimens avec un rayon de courbure constant ($R_{avg} = 3700$ mm), le déplacement vertical maximal au moment de la rupture (et par conséquent l'ouverture des fissures) est fortement influencé par la valeur du taux d'armature flexionnelle. Toutefois, la résistance des spécimens est plutôt constante, avec une réduction modérée pour les deux spécimens avec les taux d'armature flexionnelle inférieurs (SC9 et SC10, voir figure 4.10(c) et tableau 4.3).

4.3 Analyse des éléments courbes avec la théorie de la fissure critique

4.3.1 Rappel des bases de la théorie de la fissure critique

Comme expliqué de façon détaillée dans le chapitre 2, la résistance à l'effort tranchant d'éléments sans armature transversale peut être calculée selon la théorie de la fissure critique (CSCT). Ceci est vrai pour les éléments présentant un rapport a/d entre la portée d'effort tranchant (a) et la hauteur statique (d) qui les place sur le côté droit de la vallée de Kani [Kan79] (voir chapitre 2). Les spécimens étudiés (voir section 4.2) possèdent un rapport $a/d = 3.51$ et satisfont donc cette condition.
Cette théorie considère que la rupture à l'effort tranchant se produit à cause du développement d'une fissure critique dans laquelle les déformations se localisent. L'effort tranchant maximal qui peut être transmis à travers la fissure critique (V_{cc}, voir équation 2.5) peut alors être estimé en prenant en compte son ouverture (w, proportionnelle à une déformation longitudinale de référence, voir équation 2.6) et sa rugosité (κ, qui peut être mise en relation avec le diamètre maximal des granulats d_g) ainsi que les propriétés de l'élément (dimensions b et d de sa section et résistance à la compression du béton f_c). La valeur normalisée maximale de l'effort tranchant qui peut être transmis à travers la fissure critique ($V_{R,cc}/\left(b\,d\,\sqrt{f_{cm}}\right)$) peut alors être déterminée par :

$$\frac{V_{R,cc}}{b\,d\,\sqrt{f_{cm}}} = \frac{1}{3}\frac{1}{1 + 120\,\dfrac{\varepsilon\,d}{16 + d_g}} \tag{4.5}$$

Pour un élément droit (sans courbure, $R_s = \infty$), l'intensité de la force qui doit être transmise à travers la fissure critique (V_{cc}) correspond à celle de l'effort tranchant agissant dans l'élément (V). Par conséquent, la résistance d'un tel élément ($V_{R,csct}$) peut être calculée par l'équation 4.5, en admettant $V_{R,csct} = V_{R,cc}$.

4.3.2 Extension de la théorie pour le calcul d'éléments courbes

Variation de l'effort tranchant due aux forces de déviation

Les principes de la théorie de la fissure critique [Mut08a] peuvent être retenus pour le calcul de la résistance d'éléments courbes. Toutefois, l'influence des forces de déviation générées par la courbure doit être considérée. La figure 4.5 permet de comprendre que les contraintes radiales agissant dans l'âme des éléments courbes ont pour effet de faire varier l'intensité de la force qui doit être transmise à travers la fissure critique (V_{cc}).

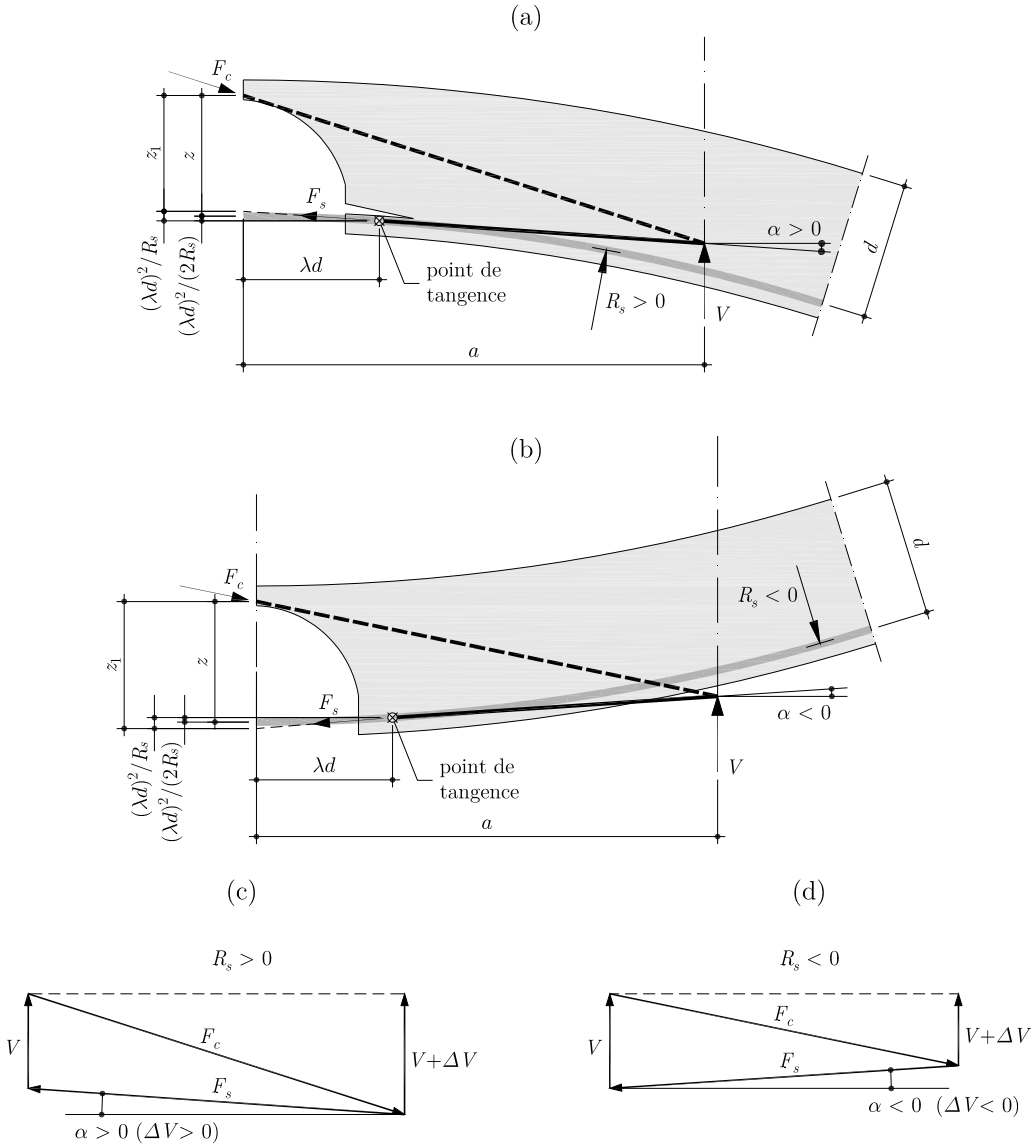


Fig. 4.13: Corps rigides considérés pour le calcul de la force de déviation modifiant la force totale qui doit être transmise à travers la fissure critique : **(a)** éléments avec une courbure positive ; et **(b)** éléments avec une courbure négative. Diagrammes d'équilibre des forces : **(c)** éléments avec une courbure positive ; et **(d)** éléments avec une courbure négative

Pour mieux comprendre cela, deux corps rigides respectivement avec une courbure positive et négative, sont montrés aux figures 4.13(a) et 4.13(b)). La forme de ces corps rigides est définie par une fissure inclinée d'effort tranchant et par une fissure de délamination le long de l'armature flexionnelle (laquelle se forme plus facilement dans le cas d'une courbure positive, en raison des contraintes de traction qui agissent sur le béton d'enrobage, voir figure 4.13(a)). Comme montré aux figures 4.13(c-d), due à l'inclinaison (α) de la force de traction agissante dans l'armature flexionnelle (F_s), une force verticale supplémentaire (ΔV) doit être transmise à travers la fissure critique :

$$V_{cc} = V + \Delta V \tag{4.6}$$

Pour cette raison, il peut être considéré que la rupture des éléments se produit quand l'intensité de cette force (V_{cc}) est égale à la force maximale qui peut être transmise à travers la fissure critique ($V_{R,cc}$, définie par l'équation 4.5). Par conséquent, la résistance théorique à l'effort tranchant d'éléments courbes ($V_{R,csct}$) peut être définie par :

$$V_{R,csct} = \frac{b\,d\,\sqrt{f_{cm}}}{3\left(1 + 120\,\dfrac{\varepsilon\,d}{16 + d_g}\right)} - \Delta V \tag{4.7}$$

La valeur de la force de déviation supplémentaire à transmettre à travers la fissure critique (ΔV) peut être calculée en considérant l'équilibre des corps rigides présentés à la figure 4.13 et en faisant l'hypothèse des petits angles :

$$\Delta V = F_s \sin(\alpha) = \frac{V\,a}{z_1} \sin(\alpha) \approx \frac{V\,a}{z_1}\,\alpha \tag{4.8}$$

où F_s est la force de traction agissante dans l'armature flexionnelle dans un point défini par la distance $\lambda\,d$ (dont la valeur sera discutée plus loin), α est l'inclinaison de la force de traction F_s qui peut être calculée selon :

$$\alpha = \operatorname{asin}\left(\frac{\lambda\,d}{R_s}\right) \approx \frac{\lambda\,d}{R_s} \tag{4.9}$$

et z_1 est la distance verticale (mesuré dans la section centrale de l'élément, voir figures 4.13(a-b)) entre la force de traction agissante dans l'armature flexionnelle (F_s) et la force de compression (F_c). Sa valeur peut être calculée selon :

$$z_1 = z + \frac{(\lambda\,d)^2}{2\,R_s} - \frac{(\lambda\,d)^2}{R_s} \tag{4.10}$$

où $z = d - x/3$ (où x est la hauteur de la zone comprimée, voir équation 2.8) est le bras de levier mesuré au centre de l'élément (figure 2.9). En introduisant les équations 4.9 et 4.10 dans l'équation 4.8, il résulte que la valeur de la force de déviation supplémentaire à transmettre à travers la fissure critique ΔV se calcul par :

$$\Delta V = \frac{2\,\lambda\,d\,a}{2\,z\,R_s - (\lambda\,d)^2}\,V \tag{4.11}$$

L'équation 4.11 montre que la valeur de ΔV est directement proportionnelle à la valeur de l'effort tranchant agissant dans l'élément (V) et dépend du rayon de courbure de l'armature flexionnelle (R_s), de la hauteur statique de l'élément (d), du bras de levier (z) qui est à sont tour influencé (équation 2.8) par le taux d'armature flexionnelle (ρ) et par les propriétés des matériaux (modules élastique E_c et E_s respectivement du béton et de l'acier), de la longueur de la portée d'effort tranchant (a) ainsi que de la valeur du coefficient λ. La valeur de ce coefficient, qui permet de définir la longueur sur laquelle les forces de déviation sont quantifiées, sera discutée par la suite. En accord avec les équations 4.7 et 4.11, il peut être noté que :

- pour des éléments droits (sans courbure, $R_s = \infty$), la valeur de de la force de déviation ΔV est évidemment nulle. Ceci signifie que la résistance donnée par l'équation 4.7 est identique à celle donnée par la théorie de la fissure critique (voir équation 2.9).
- Des valeurs positives du rayon de courbure de l'armature flexionnelle ($R_s > 0$), donnent lieu à des valeurs positives de la force de déviation ΔV. Pour cette raison, la force totale à transmettre à travers la fissure critique est augmentée (V_{cc}, voir équation 4.6).
- Des valeurs négatives du rayon de courbure de l'armature flexionnelle ($R_s < 0$), donnent lieu à des valeurs négatives de la force de déviation ΔV. Pour cette raison, la force totale à transmettre à travers la fissure critique est diminuée (V_{cc}, voir équation 4.6).
- Pour des valeurs positives du rayon de courbure de l'armature flexionnelle ($R_s > 0$, donc $\Delta V > 0$) la résistance des éléments diminue si comparée à celle des éléments droits ($\Delta V = 0$, voir équation 4.7)
- Pour des valeurs négatives du rayon de courbure de l'armature flexionnelle ($R_s < 0$, donc $\Delta V < 0$) la résistance des éléments augmente si comparée à celle des éléments droits ($\Delta V = 0$, voir équation 4.7)

La valeur du coefficient λ permet le calcul de l'inclinaison (α, voir équation 4.9) de la force de traction agissante dans l'armature flexionnelle (F_s) et permet ainsi de quantifier la force de déviation (ΔV, voir équation 4.11). Sa valeur est potentiellement influencée par un nombre important de paramètres, à savoir : la géométrie des éléments, les caractéristiques de l'armature flexionnelle, la position réelle de la fissure critique, le rapport entre la longueur de la portée d'effort tranchant et la hauteur statique de l'armature flexionnelle ainsi que par les conditions de chargement de l'élément (ponctuelle ou répartie). Tous ces paramètres rendent difficile l'établissement d'une formulation théorique pour le calcul du coefficient λ. Toutefois, en se référant au spécimens de la campagne d'essais (ayant une géométrie et des taux d'armature flexionnelle usuels, voir section 4.2), il s'avère que la prise en compte d'une valeur constante $\lambda = 0.5$ (ce qui signifie que la force de déviation ΔV est déterminée au droit de la section de contrôle située à une distance $d/2$ du point d'application de la charge [Mut08a], voir figure 2.9) est suffisante pour reproduire fidèlement les tendances observées lors des essais (figures 4.10(a-b)). Des

comparaisons entre les résistances des spécimens d'essai et les résistances calculées avec la théorie de la fissure critique sont montrées aux figures 4.14(a-d) respectivement pour les quatre groupes de spécimens présentant le même taux d'armature flexionnelle. Ces figures mettent en avant les résistances normalisées des spécimens ($V_{max}/\left(b\,d\,\sqrt{f_{cm}}\right)$) ainsi que les résistance normalisées calculées ($V_{R,csct}/\left(b\,d\,\sqrt{f_{cm}}\right)$) en fonction du rapport a/R_s entre la longueur de la portée d'effort tranchant (a) et le rayon de courbure de l'armature flexionnelle (R_s). Les calculs ont été effectués selon le modèle de base de la théorie de la fissure critique (courbes point-tillées) qui ne tient pas compte de la courbure des éléments (voir équation 4.7 avec $\Delta V = 0$) et selon le modèle modifié pour considérer cet effet (courbes continues, voir équation 4.7 avec $\Delta V = f\,(R_s)$). L'analyse de ces figures confirme que la résistance à l'effort tranchant est augmentée pour les éléments avec une courbure négative et diminuée pour ceux avec une courbure positive, en accord avec les observations expérimentales. Une comparaison entre les résistances calculées ($V_{R,csct}$) et celles obtenues dans les essais (V_{max}) est faite dans le tableau 4.4. Ce tableau montre que pour tous les spécimens, les résistances déterminées sont en bon accord avec celles obtenues lors des essais et ce autant pour les calculs effectués avec le modèle de base de la théorie de la fissure critique (avec $\Delta V = 0$) ainsi que pour ceux effectués avec le modèle modifié pour considérer l'effet de la courbure des éléments ($\Delta V = f\,(R_s)$). Le modèle de base présente une moyenne du rapport $V_{max}/V_{R,csct}$ légèrement meilleure (1.09 au lieu de 1.13) en comparaison au modèle modifié. Toutefois, le coefficient de variation (CoV), et en particulier le coefficient de corrélation (CoC, de 0.63 à 0.91), s'améliorent sensiblement par la prise en compte de la courbure des éléments.

Tab. 4.4: Comparaison entre les résistances prédites avec la théorie de la fissure critique (modèle de base et modèle modifié) ainsi que les résistances des spécimens

		essai	$\Delta V = 0$		$\Delta V = f\,(R_s)$	
spécimen	$\frac{a}{R_s}$	V_{max}	$V_{R,csct}$	$\frac{V_{max}}{V_{R,csct}}$	$V_{R,csct}$	$\frac{V_{max}}{V_{R,csct}}$
	[-]	[kN]	[kN]	[-]	[kN]	[-]
SC7	0.34	130.0	135.3	0.96	119.1	1.09
SC8	0.34	131.0	120.6	1.09	107.0	1.22
SC9	0.34	116.5	109.5	1.06	97.4	1.20
SC10	0.34	116.5	100.5	1.16	89.8	1.30
SC11	0.23	120.0	135.7	0.88	124.1	0.97
SC12a	0.00	148.5	133.8	1.11	133.8	1.11
SC13a	0.00	137.0	119.7	1.14	119.7	1.14
SC14	-0.22	154.0	135.5	1.14	148.6	1.04
SC15	-0.32	166.5	134.9	1.23	154.5	1.08
			moy	1.09	moy	1.13
			CoV	0.10	CoV	0.09
			CoC	0.63	CoC	0.91

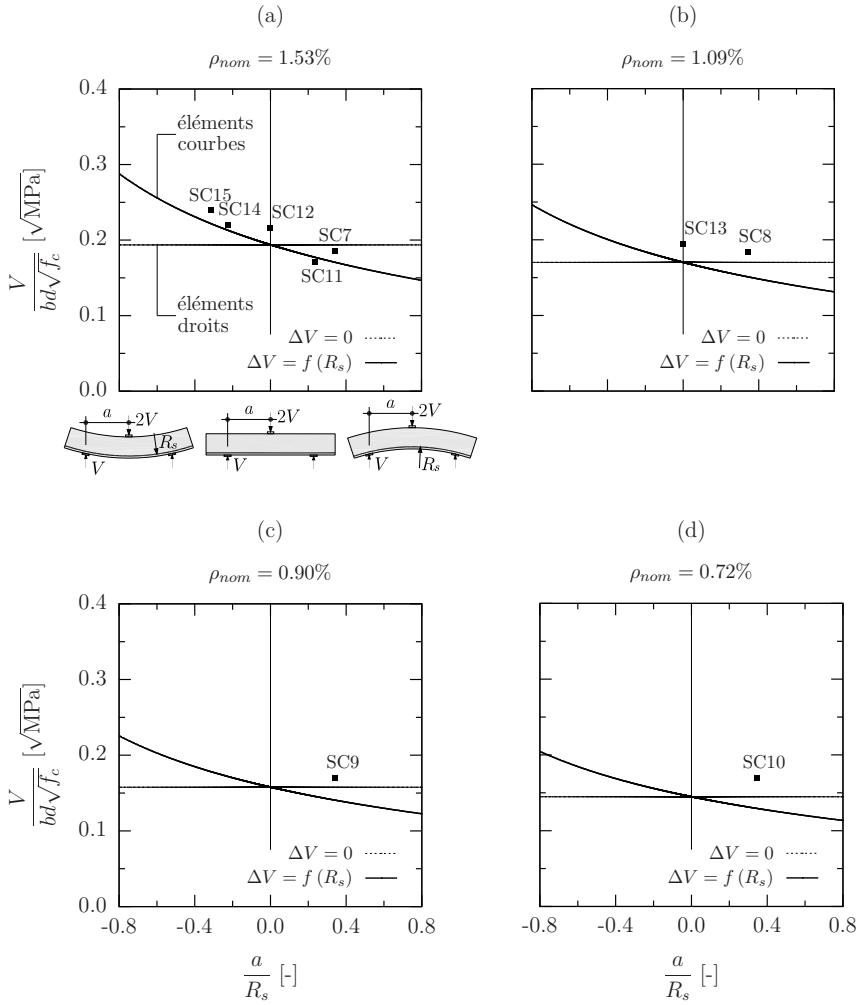


Fig. 4.14: Comparaison entre les résistances prédites avec la théorie de la fissure critique (courbes point-tillées pour le modèle de base et courbes continues pour le modèle modifié tenant compte de la courbure des éléments) et les résistance des spécimens avec un taux d'armature flexionnelle : **(a)** $\rho = 1.53\%$; **(b)** $\rho = 1.09\%$; **(c)** $\rho = 0.90\%$; et **(d)** $\rho = 0.72\%$

Considération sur la position de la fibre de référence

La théorie de la fissure critique [Mut08a] prévoit le calcul de la déformation longitudinale de référence (ε) au droit d'une fibre se situant à une distance $y_{ref}d$ de la fibre comprimée (figure 2.9). Pour rappel, cette déformation sert à estimer l'ouverture de la fissure critique (w, voir équation 2.6). Pour les poutres droites, la position de la fibre de référence ($y_{ref} = 0.6$) a été définie en se basant sur les résultats d'un panel d'essais d'effort tranchant existants (figure 2.10) [Mut08a]. Pour les éléments courbes, il convient de s'interroger si cette valeur est toujours adaptée. Une analyse a donc été effectuée afin de calculer la distance relative (z_v, voir figure 4.15(b)) entre la bielle théorique (appui direct) et l'armature flexionnelle (endroit où les fissures se développent). La connaissance

de cette distance est en effet particulièrement importante car elle permet d'apprécier la facilité avec laquelle les fissures peuvent pénétrer dans la bielle en affaiblissant sa résistance [Vec86]. Dans le cas d'une distance z_v plus importante, les fissures interceptent moins facilement la bielle, conduisant à une résistance supérieure de l'élément. Au contraire, pour une distance z_v inférieure, la résistance des éléments peut diminuer à cause de l'endommagement précoce de la bielle pénétrée par les fissures. La prise en compte de cette variation de distance peut se faire en considérant une position différente de la fibre de référence ($y_{ref} \neq 0.6$). En effet, si la distance z_v dans les éléments courbes augmente par rapport à celle des éléments droits, une valeur $y_{ref} < 0.6$ doit alors être définie. Ceci donne lieu à des résistance plus importantes car la valeur de la déformation de référence diminue (ε, voir équation 2.7). Au contraire, si cette distance diminue, une valeur $y_{ref} > 0.6$ devra être considérée.
La position et la forme théoriques de la bielle (appui direct) sont montrées aux figures 4.15(a) à 4.15(c) respectivement pour les éléments avec une courbure négative, nulle (éléments droits) et positive. La figure 4.15(b) montre que pour des éléments droits, la positon et la forme de la bielle théorique sont déterminées par une droite reliant le point d'application de la charge à l'appui. Par contre, les bielles qui se développent dans les éléments avec une courbure négative et positive présentent une allure légèrement courbe due à l'action des contraintes radiales qui se développent dans l'âme des éléments (figure 4.5). Il peut être observé que l'orientation de la courbure des bielles théoriques correspond à celle de l'armature flexionnelle (figures 4.15(a,c)). La position théorique de la bielle peut être définie avec un modèle bielles-et-tirants. Les principes de ce modèle sont présentés à la figure 4.16. Autre que les éléments représentant l'armature flexionnelle (tirants) et la zone comprimée (bielles), des éléments radiaux composent également les modèles bielles-et-tirants. Dans le cas d'éléments avec une courbure positive (qui développe des contraintes radiales de traction, voir figure 4.5(c)), les éléments radiaux sont des tirants qui augmentent progressivement l'inclinaison de la bielle (angle β qui augmente en direction de l'appui, voir figures 4.15(c) et 4.16). Au contraire, dans le cas d'éléments avec une courbure négative (qui développe des contraintes radiales de compression, voir figure 4.5(a)), les éléments radiaux sont des bielles qui réduisent progressivement l'inclinaison de la bielle (angle β, voir figures 4.15(a) et 4.16). La résolution de l'équilibre du modèle bielles-et-tirants peut être effectuée par un calcul numérique (figure 4.16), dont les formules principales sont données aux équations 4.12 à 4.17. Il convient de souligner que ce modèle prévoit des valeurs constantes de la force de traction agissante dans l'armature flexionnelle (F_s) et des valeurs variables de la force de compression agissante dans la bielle (F_c).

$$F_s = \frac{V\,a}{z} \tag{4.12}$$

$$\theta_i = \operatorname{asin}\left(\frac{x_i}{R_s}\right) \qquad i = 1, \ldots, n \tag{4.13}$$

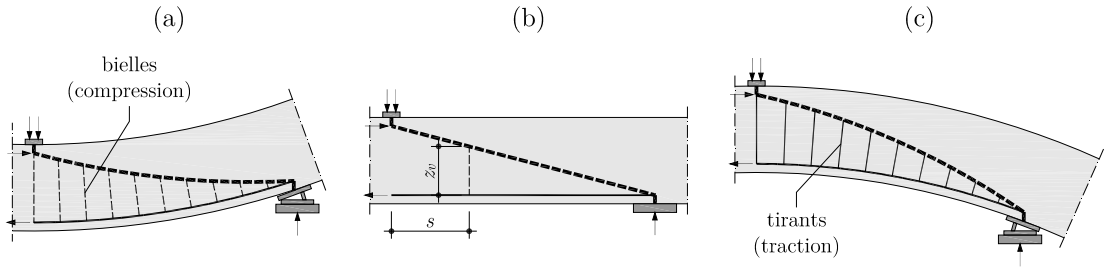


Fig. 4.15: Position et forme théoriques de la bielle (appui direct) : **(a)** éléments avec une courbure négative ; **(b)** éléments sans courbure ; et **(c)** éléments avec une courbure positive

$$\ell_i = \frac{R_s}{2}\,(\theta_{i+1} - \theta_{i-1}) \qquad i = 1, \ldots, n-1$$
$$\ell_n = \frac{R_s}{2}\,(\theta_n - \theta_{n-1}) \tag{4.14}$$

$$f_{t,i} = \frac{F_s}{R_s}\,\ell_i \qquad i = 1, \ldots, n \tag{4.15}$$

$$F_{c,1} = \sqrt{(V + f_{t,1})^2 + F_s^2}$$
$$F_{c,i} = \sqrt{\left(F_{c,1}\cos\beta_1 - \sum_{j=2}^{j=i} f_{t,j}\sin\theta_j\right)^2 + \left(-F_{c,1}\sin\beta_1 - \sum_{j=2}^{j=i} f_{t,j}\cos\theta_j\right)^2} \tag{4.16}$$
$$i = 2, \ldots, n-1$$

$$\beta_1 = \operatorname{atan}\frac{V + f_{t,1}}{F_s}$$
$$\beta_i = \beta_1 + \frac{R_s}{|R_s|}\sum_{j=2}^{j=i} \operatorname{acos}\left(\frac{f_{t,j}^2 - F_{c,j-1}^2 - F_{c,j}^2}{-2\,F_{c,j-1}\,F_{c,j}}\right) \quad i = 2, \ldots, n-1 \tag{4.17}$$

Le calcul de l'équilibre du modèle bielles-et-tirants de la figure 4.16 peut être effectué pour toutes géométries des éléments. Dans le cadre de cette étude, il est surtout intéressant de connaître les distances entre la bielle théorique et l'armature flexionnelle (z_v, voir figure 4.16) en fonction du rayon de courbure de l'armature flexionnelle (R_s). Ces distances peuvent ensuite être comparées à celles calculées pour un élément de référence, avec les mêmes caractéristiques mais sans courbure (qui développe une bielle théorique d'appui direct droite, voir figure 4.15(b)). Ceci a été fait pour des caractéristiques de

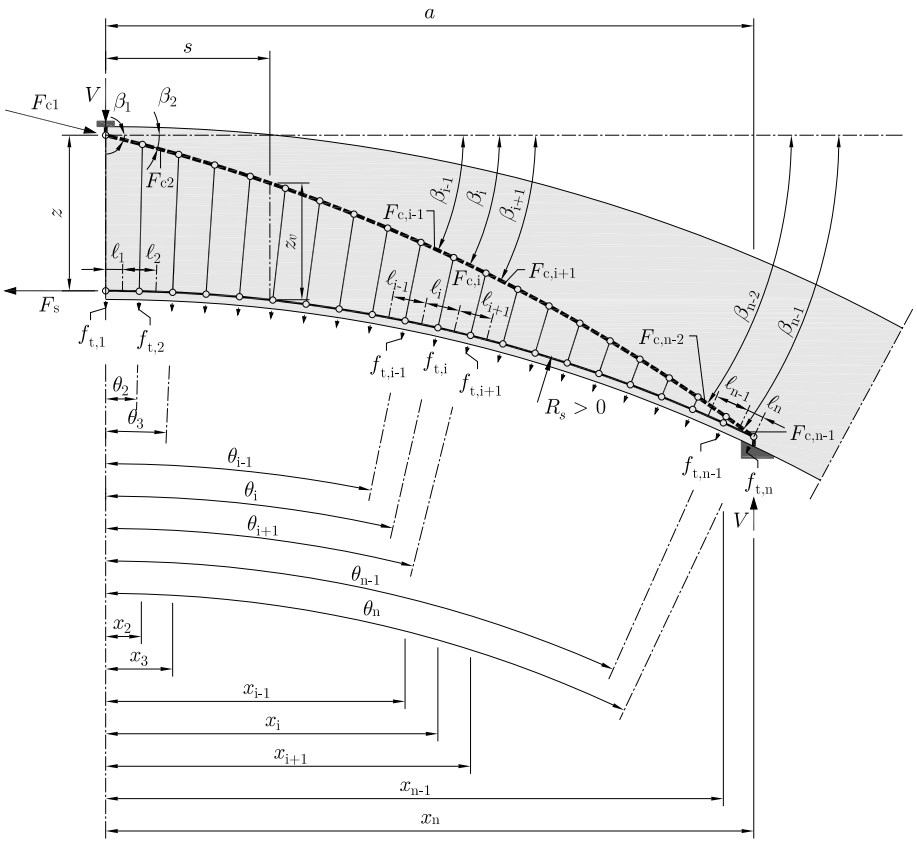


Fig. 4.16: Modèle bielles-et-tirants pour le calcul numérique de la position théorique de la bielle (appui direct)

base des spécimens similaires à celles des spécimens de la série d'essai (voir section 4.2, $a = 1220$ mm, $d = 360$ mm, $\rho = 1.53\%$, $E_c = 35$ GPa et $E_s = 205$ GPa) et en faisant varier la valeur du rayon de courbure de l'armature flexionnelle (avec une borne de sa valeur fixée à $|R_s| \geq a$, donc une plage du rapport a/R_s comprise entre -1 et 1). Les résultats de cette étude sont montrés à la figure 4.17(a) (courbes continues) qui met en avant la variation de la distance z_v en fonction du rapport a/R_s. La variation de la distance z_v est représentée par le rapport $\Delta z_v = z_{v,R_s}/z_{v,ref}$ entre la distance calculée pour un élément courbe (z_{v,R_s}) et celle de l'élément de référence sans courbure ($z_{v,ref}$). Ce rapport à été calculé à différentes distances (s, voir figure 4.15(b)) du point d'application de la charge. Les résultats obtenus montrent que la distance z_v augmente légèrement dans le cas des éléments courbes. Comme montré par la figure 4.17(a) (courbes point-tillées), cette variation peut être fidèlement approximée par une fonction parabolique du type :

$$\begin{aligned} \Delta z_v &= c_{neg} \left(\frac{a}{R_s}\right)^2 \qquad \text{si } R_s < 0 \\ \Delta z_v &= c_{pos} \left(\frac{a}{R_s}\right)^2 \qquad \text{si } R_s > 0 \end{aligned} \tag{4.18}$$

où c_{neg} est la valeur de Δz_v calculée pour $R_s = -a$ et c_{pos} celle calculée pour $R_s = a$ (dans la figure 4.17(a), $c_{neg} = 0.036$ et $c_{pos} = 0.024$ pour la courbe qui se réfère à $s = 1.0\,d$). La figure 4.17(b) montre l'effet du rapport a/d entre la longueur de la portée d'effort tranchant (a) et de la hauteur statique de l'armature flexionnelle (d) sur la valeur Δz_v. Des tendances similaire à celle montrée à la figure 4.17(a) sont observées. De plus, il peut être observé que la réduction du rapport a/d conduit à l'augmentation de la valeur de Δz_v. Ceci signifie qu'en considérant une portée d'effort tranchant et un rayon de courbure donnés (rapport a/R_s fixe), l'effet de la courbure des éléments est accentué pour des éléments avec une hauteur statique plus importante, ce qui est raisonnable.

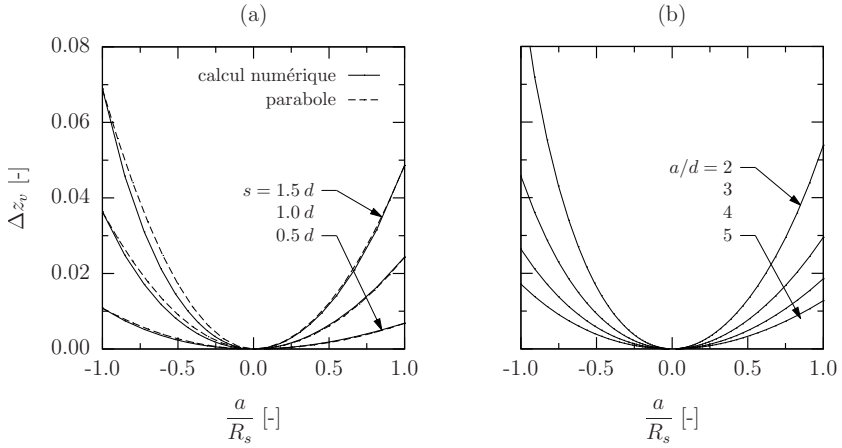


Fig. 4.17: Variation de la distance entre la bielle théorique (appui direct) et l'armature flexionnelle en fonction du rapport entre la longueur de la portée d'effort tranchant et le rayon de courbure de l'armature flexionnelle (calculs effectués avec $\rho = 1.53\%$, $E_c = 35$ GPa et $E_s = 205$ GPa) : **(a)** spécimens avec des caractéristiques similaires à ceux de la série d'essais ($a = 1220$ mm, $d = 360$ mm) ; et **(b)** effet du rapport entre la longueur de la portée d'effort tranchant et la hauteur statique des éléments (calculs effectués à la position $s = 1.0\,d$)

Ces observations permettent d'affirmer que la position de la fibre de référence ($y_{ref}d = 0.6\,d$) peut être modifiée pour le cas des éléments courbes. Une valeur de y_{ref} inférieure à 0.6 peut être utilisée parce que, dans le cas des éléments courbes, les fissures pénètrent moins facilement dans la zone comprimée (laquelle est plus éloignée de l'armature flexionnelle). Une équation parabolique du même genre de celle qui définie la variation de la distance z_v pour les éléments courbes (équation 4.18) est proposée pour le calcul de la nouvelle valeur de y_{ref} en fonction du rayon de courbure de l'armature flexionnelle (R_s) :

$$\Delta z_v = 0.6 - k_{ref}\, c_{moy} \left(\frac{a}{R_s}\right)^2 \tag{4.19}$$

où le coefficient c_{moy} représente la moyenne des valeurs de c_{neg} et c_{pos} et le coefficient k_{ref} permet d'amplifier la forme de la parabole. L'allure de cette parabole est présentée à la figure 4.18 et montre également la position (a/R_s) des spécimens de la série d'essais. Les résistances théoriques des spécimens d'essais ont été calculées avec l'équation 4.7 en

prenant en compte la nouvelle position de la fibre de référence (calculée en fonction de leur rayon de courbure (R_s) avec l'équation 4.19 et avec $c_{moy} = 0.03$ et $k_{ref} = 20$). La valeur $c_{moy} = 0.03$ à été calculée sur la base des résultats du calcul numérique montrés à la figure 4.17(a) (pour $s = 1.0\,d$). La valeur $k_{ref} = 20$ est celle qui permet d'obtenir la meilleure correspondance avec les résultats des essais.
Les courbes définissant la résistance des éléments calculée en tenant compte de leur courbure et du déplacement de la fibre de référence, sont mises en avant aux figures 4.19(a) à 4.19(d) (courbes trait-tillées) respectivement pour les quatre valeurs du taux d'armature flexionnelle (ρ). Une comparaison est possible avec les résultats des essais et avec les courbes calculées selon le modèle de base de la théorie de la fissure critique (courbes point-tillées, voir équation 4.7 avec $\Delta V = 0$) et selon le premier modèle modifiée (courbes continues, voir équation 4.7 avec $\Delta V = f\,(R_s)$, mais avec une valeur constante de $y_{ref} = 0.6$). Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau 4.5 et montrent que la qualité du modèle modifié augmente en considérant le déplacement de la fibre de contrôle. En effet, une meilleure moyenne des rapports $V_{max}/V_{R,csct}$ (moy = 1.07) et un meilleur coefficient de variation (CoV = 8%) sont obtenus avec ce modèle. De plus, le coefficient de correlation (CoC = 90%) est du même ordre de grandeur que celui obtenu avec le modèle tenant compte d'une valeur constante $y_{ref} = 0.6$.
Il faut toutefois souligner que la valeur $k_{ref} = 20$ (se référer à l'équation 4.19) a été établie uniquement sur la base des résultats de la série d'essais présentée dans dans cette thèse. Pour la prise en compte généralisée d'une valeur variable de y_{ref} pour les éléments courbes, une validation expérimentale ultérieure sera probablement nécessaire. L'équation 4.19 est donc valable uniquement pour des éléments similaires aux spécimens d'essais, à savoir : des valeurs du rapport a/R_s comprises entre -0.4 et 0.4 et des hauteurs statiques d'environ 350 mm.

Tab. 4.5: Comparaison entre les résistances prédites avec la théorie de la fissure critique (modèle de base et modèles modifiés) et les résistances des spécimens

		essai	$\Delta V = 0$ $y_{ref} = 0.6$		$\Delta V = f\,(R_s)$ $y_{ref} = 0.6$		$\Delta V = f\,(R_s)$ $y_{ref} = f\,(R_s)$		
spécimen	$\frac{a}{R_s}$	V_{max}	$V_{R,csct}$	$\frac{V_{max}}{V_{R,csct}}$	$V_{R,csct}$	$\frac{V_{max}}{V_{R,csct}}$	y_{ref}	$V_{R,csct}$	$\frac{V_{max}}{V_{R,csct}}$
	[-]	[kN]	[kN]	[-]	[kN]	[-]	[-]	[kN]	[-]
SC7	0.34	130.0	135.3	0.96	119.1	1.09	0.53	129.6	1.00
SC8	0.34	131.0	120.6	1.09	107.0	1.22	0.53	116.0	1.13
SC9	0.34	116.5	109.5	1.06	97.4	1.20	0.53	105.5	1.10
SC10	0.34	116.5	100.5	1.16	89.8	1.30	0.53	97.1	1.20
SC11	0.23	120.0	135.7	0.88	124.1	0.97	0.57	128.9	0.93
SC12a	0.00	148.5	133.8	1.11	133.8	1.11	0.60	133.8	1.11
SC13a	0.00	137.0	119.7	1.14	119.7	1.14	0.60	119.7	1.14
SC14	-0.22	154.0	135.5	1.14	148.6	1.04	0.57	154.2	1.00
SC15	-0.32	166.5	134.9	1.23	154.5	1.08	0.54	167.4	0.99
			moy	1.09	moy	1.13		moy	1.07
			CoV	0.10	CoV	0.09		CoV	0.08
			CoC	0.63	CoC	0.91		CoC	0.90

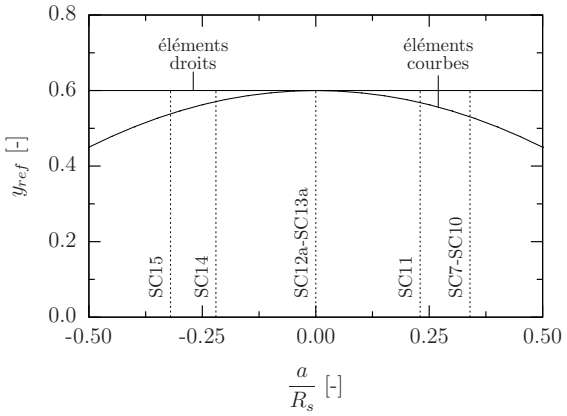


Fig. 4.18: Proposition pour le calcul de la position de la fibre de référence selon le rapport entre la longueur de la portée d'effort tranchant et le rayon de courbure de l'armature flexionnelle (paramètres de calcul utilisés : $c_{moy} = 0.03$ et $k_{ref} = 20$)

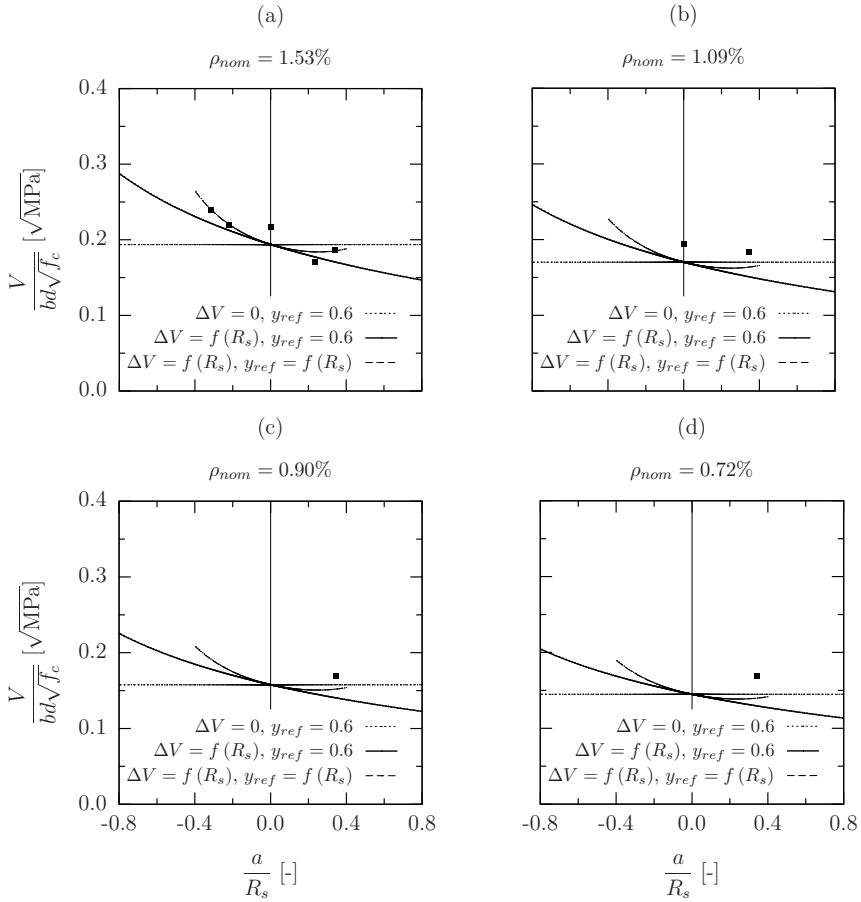


Fig. 4.19: Comparaison entre les résistances prédites avec la théorie de la fissure critique (courbes point-tillées pour le modèle de base, courbes continues pour le modèle tenant compte de la courbure des éléments, courbes trait-tillées pour le modèle tenant compte de la courbure des éléments et du déplacement de la fibre de référence) et les résistance des spécimens avec un taux d'armature flexionnelle : **(a)** $\rho = 1.53\%$; **(b)** $\rho = 1.09\%$; **(c)** $\rho = 0.90\%$; et **(d)** $\rho = 0.72\%$

Utilisation des modèles selon la philosophie des niveaux d'approximation

Trois modèles de calcul ont été discutés précédemment :

- modèle de base de la théorie de la fissure critique : ce modèle ne considère pas les forces de déviation ($\Delta V = 0$). De cette façon, l'effet favorable donné par une courbure négative et celui défavorable donné par une courbure positive sont négligés.
- Premier modèle modifié : ce modèle considère les forces de déviation, mais ne considère pas le déplacement de la fibre de référence ($\Delta V = f(R_s)$, $y_{ref} = 0.6$). L'effet défavorable donné par une courbure positive est en général surestimé par ce modèle.
- Deuxième modèle modifié : ce modèle considère les forces de déviation et le déplacement de la fibre de référence ($\Delta V = f(R_s)$, $y_{ref} = f(R_s)$), donnant lieu aux estimations les plus précises des résistances des éléments.

En accord avec la philosophie [Mut12b] décrite par le Model Code 2010 [Fib11] pour la conception des ouvrages et la vérification des structures existantes, ces trois modèles peuvent être introduits dans un contexte de niveaux d'approximation :

- dans le cadre d'une vérification préliminaire (dimensionnements simples et sécuritaires, niveau d'approximation I), le modèle de base de la théorie de la fissure critique peut être utilisé dans le cas d'éléments avec une courbure négative. Par contre, dans le cas d'éléments avec une courbure positive, le modèle modifié tenant compte de la courbure doit être utilisé, de façon à considérer son effet défavorable.
- Dans une phase de vérification plus raffinée (niveau d'approximation II), le premier modèle modifié peut être utilisé pour considérer l'augmentation de résistance donnée par une courbure négative des éléments.
- Pour des niveaux d'approximation supérieurs (niveau III), un calcul considérant le déplacement de la fibre de référence peut éventuellement être envisagé.

4.3.3 Application du modèle proposé pour l'étude des essais de Kani

Comme expliqué dans la section 4.1.2, une série d'essais sur des éléments non-prismatiques soumis à la flexion pure a été effectuée par Kani [Kan79]. Les caractéristiques géométriques des spécimens et celles des matériaux sont résumées dans le tableau 4.6 : épaisseur du spécimen (b), hauteur statique de l'armature flexionnelle mesurée aux bords (d) et au centre (d_0) du spécimen, demi-longueur de la zone à section variable (c) (figure 4.20), limite d'écoulement des armatures flexionnelles (f_y) et résistance à la compression du béton f_{cm}. Pour la taille maximale des granulats, une valeur $d_g = 20$ mm peut être considérée [Kan79]. Quatre spécimens de la série d'essai (K391, K398 à K400) n'ont pas été considérés du fait de leur géométrie particulière ($c \leq d_0$, spécimens trapus).
Avec le modèle bielles-et-tirants de la figure 4.6(b), il a été montré que la déviation de la membrure comprimée introduit, dans l'âme des spécimens, un état de contraintes similaire à celui des spécimens prismatiques soumis à l'effort tranchant. Par conséquent,

Tab. 4.6: Spécimens non-prismatiques analysés par Kani [Kan79] : caractéristiques géométriques et des matériaux

spécimen	b	d_1	d_0	c	$\frac{c}{d_0}$	ρ^{a}	f_y	f_{cm}
	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[-]	[%]	[Mpa]	[Mpa]
K389	157	544	305	544	1.78	2.10	383	34.7
K390	152	544	305	810	2.66	2.16	390	34.5
K392	154	544	305	767	2.51	2.09	365	27.6
K392a	157	544	306	767	2.51	2.04	365	27.8
K393	152	544	313	1519	4.85	2.10	371	28.3
K394	152	544	308	925	3.00	2.12	371	28.5
K395	155	544	305	610	2.00	2.10	379	32.8
K396	153	544	306	1829	5.98	2.13	379	27.4
K397	154	544	306	1072	3.50	2.09	379	25.8

a : calculé au centre du spécimen : $\rho = A_s / (b\, d_0)$, où A_s est la surface d'armature flexionnelle

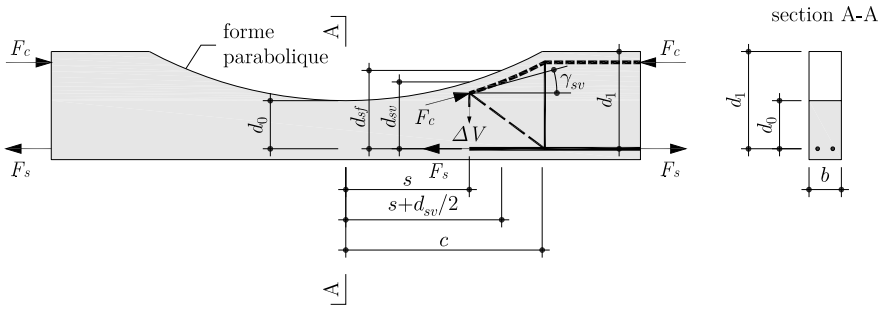


Fig. 4.20: Spécimens non-prismatiques analysés par Kani [Kan79] : définition de la géométrie

malgré la sollicitation des spécimens à la flexion pure, ces derniers ont été concernés par le développement de fissures inclinées. Ces dernières ont conduit dans quelques cas à une rupture d'effort tranchant.

Les résultats de ces essais peuvent être analysés sur la base des principes de la théorie de la fissure critique modifiée pour la prise en compte de la courbure des éléments (voir section 4.3.2). Un travail similaire pour la considération de l'inclinaison de la membrure comprimée d'éléments en béton armé avec une section à inertie variable, dans le cadre d'une analyse basée sur la théorie de la fissure critique, a été effectué par Pérez et al. [Per12]. Comme mis en avant par la figure 4.20, la force de déviation (ΔV) à prendre en compte pour ces spécimens correspond à la composante verticale de l'effort de compression F_c agissant dans la bielle courbe. Par conséquent, l'intensité de la force de déviation ($\Delta V\,(s)$) agissante à la position s (figure 4.20) peut être exprimée en fonction du moment de flexion (M) agissant dans les spécimens :

$$\Delta V\,(s) = \frac{M}{z_{sv}} \tan \gamma_{sv} = \frac{M}{z_{sv}} \frac{2\ (d_1 - d_0)}{c^2}\ s \tag{4.20}$$

où $z_{sv} = d_{sv} - x_{sv}/3$ est le bras de levier entre les forces F_c et F_s mesuré à la position

s, et d_{sv}, x_{sv} et γ_{sv} sont respectivement la hauteur statique de l'armature flexionnelle (équation 4.23), la hauteur de la zone comprimée (équation 4.24) et l'inclinaison de la force de compression F_c calculées à la même position s en considérant une forme parabolique du spécimen. Dans le cas des spécimens de Kani, dans lesquels l'effort tranchant est nul, l'effort qui peut être transmis à travers la fissure critique (V_{cc}) correspond à la force de déviation ($V_{cc} = \Delta V$). Par conséquent, l'introduction de l'équation 4.20 dans l'équation 4.5 permet le calcul de la résistance des spécimens à la positon s ($M_{R,csct}(s)$). En considérant la variation de la géométrie des spécimens non-prismatiques, ce calcul doit être fait pour toutes positions s, de façon a identifier la section déterminante. Cette procédure est similaire à celle nécessaire pour le calcul de la résistance d'éléments sollicités par une charge repartie [Mut08a]. La section déterminante corresponde à celle dans laquelle la résistance calculée ($M_{R,csct}(s)$) est minimale :

$$M_{R,csct} = \min \left[\frac{b\, d_{sv}\, \sqrt{f_{cm}}}{3\left(1 + 120\, \dfrac{\varepsilon_{sf}\, d_{sf}}{16 + d_g}\right)} \; \frac{z_{sv}}{\dfrac{2\,(d_1 - d_0)}{c^2}\, s} \right] \qquad s = 0, \ldots, c \tag{4.21}$$

où ε_{sf} et d_{sf} sont respectivement la hauteur statique de l'armature flexionnelle (équation 4.23) et la déformation de la fibre de référence calculées à la position $s + d_{sv}/2$. En se référant à l'équation 2.7, la déformation de la fibre de référence (ε_{sf}) peut être calculée par :

$$\varepsilon_{sf} = \frac{M\;(0.6\, d_{sf} - x_{sf})}{b\, d_{sf}\, E_s \left(d_{sf} - \dfrac{x_{sf}}{3}\right)(d_{sf} - x_{sf})} \tag{4.22}$$

où x_{sf} est la hauteur de la zone comprimée calculée à la position $s + d_{sv}/2$ (équation 4.24). Les hauteurs statiques d_{sv} et d_{sf} peuvent être calculées selon :

$$\begin{aligned} d_{sv} &= \frac{(d_1 - d_0)}{c^2}\, s^2 + d_0 \\ d_{sf} &= \frac{(d_1 - d_0)}{c^2} \left(s + \frac{d_{sv}}{2}\right)^2 + d_0 \qquad \text{si} \quad s + \frac{d_{sv}}{2} \leq c \\ d_{sf} &= d_1 \qquad \text{si} \quad s + \frac{d_{sv}}{2} > c \end{aligned} \tag{4.23}$$

Les hauteurs comprimées x_{sv} et x_{sf} peuvent être calculées selon :

$$\begin{aligned} x_{sv} &= d_{sv}\, \rho_{sv}\, \frac{E_s}{E_c} \left(\sqrt{1 + \frac{2\, E_c}{\rho_{sv}\, E_s}} - 1\right) \\ x_{sf} &= d_{sf}\, \rho_{sf}\, \frac{E_s}{E_c} \left(\sqrt{1 + \frac{2\, E_c}{\rho_{sf}\, E_s}} - 1\right) \end{aligned} \tag{4.24}$$

où ρ_{sv} et ρ_{sf} sont les taux d'armature flexionnelle calculés respectivement à la position s et $s + d_{sv}/2$:

$$\begin{aligned} \rho_{sv} &= \rho \, \frac{d_0}{d_{sv}} \\ \rho_{sf} &= \rho \, \frac{d_0}{d_{sf}} \end{aligned} \tag{4.25}$$

Les résultats de ces calculs (effectués avec des modules élastiques du béton $E_c = 35$ GPa et de l'acier $E_s = 205$ GPa) sont montrés à la figure 4.21. Cette figure montre, pour chacun des neuf spécimens considérés, une courbe indiquant la relation entre la résistance ($M_{R,csct}\,(s)$) et la position (s) de la section de calcul relative à la demi-longueur du spécimen c (figure 4.20). De plus, un point indique la position de la valeur minimale de $M_{R,csct}\,(s)$, qui correspond à la résistance du spécimen à l'effort tranchant ($M_{R,csct}$). Il convient de remarquer que la section déterminante se trouve, pour tous les spécimens, à une position $s \approx 0.65\,c$.

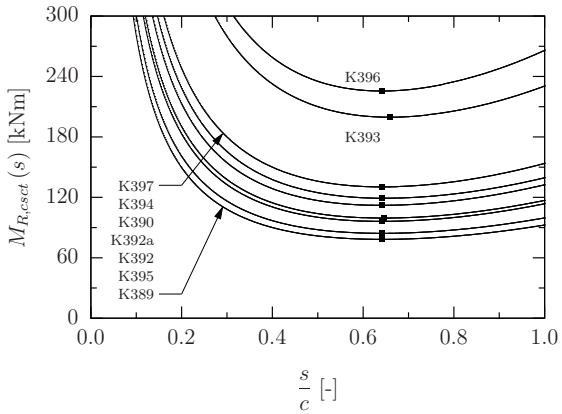


Fig. 4.21: Calcul de la résistance à l'effort tranchant des spécimens non-prismatiques analysés par Kani [Kan79] : résistance maximale en fonction de la position de calcul

En plus du mode de rupture par effort tranchant, il faut également considérer les ruptures par flexion. La résistance à la flexion peut être calculée, selon un calcul plastique, par :

$$M_{flex} = \min \left[\rho_{sv} \, b \, d_{sv} \, f_y \, \left(d_{sv} - \frac{\rho_{sv} \, d_{sv} \, f_y}{2 \, f_{cm}} \right) \right] \qquad s = 0, \ldots, c \tag{4.26}$$

où f_y est la limite d'écoulement de l'armature flexionnelle. Par conséquent, la résistance théorique de chaque spécimens ($M_{R,calc}$) sera donnée par la valeur minimale entre les résistances calculées selon les deux modes de rupture (effort tranchant et flexion) :

$$M_{R,calc} = \min \left(M_{R,csct}; M_{flex} \right) \tag{4.27}$$

Les résultats des calculs sont résumés dans le tableau 4.7. Une très bonne correspondance

entre les résistances des spécimens (M_{max}) et celles prédites par le modèle ($M_{R,calc}$) peut être remarquée (avec une moyenne du rapport $M_{max}/M_{R,calc}$ égale à 0.98 et un coefficient de variation de 7%). De plus, les modes de rupture sont également correctement identifiés.

Tab. 4.7: Résultats du calcul de la résistance des spécimens non-prismatiques analysés par Kani [Kan79]

spécimen	$\frac{c}{d_0}$ [-]	mode de rupture observé	M_{max} [kNm]	$M_{R,csct}$ [kNm]	M_{flex} [kNm]	$M_{R,calc}$ [kNm]	$\frac{M_{max}}{M_{R,calc}}$ [-]
K389	1.78	effort tranchant	81.3	78.2	104.1	78.2	1.04
K390	2.66	effort tranchant [a]	95.0	112.0	104.8	104.8	0.91
K392	2.51	effort tranchant [a]	92.4	96.1	94.1	[b]94.1	0.98
K392a	2.51	effort tranchant [a]	88.6	99.3	94.9	[b]94.9	0.93
K393	4.85	flexion [a]	107.3	199.1	100.1	100.1	1.07
K394	3.00	effort tranchant [a]	97.1	118.9	98.1	98.1	0.99
K395	2.00	effort tranchant	72.4	84.2	100.9	84.2	0.86
K396	5.98	flexion [a]	103.6	224.9	98.5	98.5	1.05
K397	3.50	effort tranchant [a]	91.3	130.1	96.6	96.6	0.95
						moy	0.98
						CoV	0.07

a : valeur du rapport $M_{max}/M_{flex,\text{Kani}}$ (entre la résistance du spécimen et la résistance à la flexion calculée par Kani [Kan79]) supérieure à 1
b : différence entre $M_{R,csct}$ et M_{flex} inférieure à 5%

4.4 Conclusions

Des essais d'effort tranchant ont été effectués sur des éléments en béton armé, sans armature transversale et avec des rayons de courbure variables, soumis à l'action combinée d'un moment de flexion et d'un effort tranchant. Des modèles de calcul ont été élaborés dans le but d'étudier leur comportement. Suite à ce travail, les conclusions suivantes peuvent être faites :

1. Un effet important de l'interaction entre l'effort tranchant et le moment de flexion a été mis en évidence. Le moment de flexion a pour effet de provoquer de forces de déviation qui sollicitent l'âme des éléments courbes à la compression ou à la traction, influençant fortement leur comportement et leur résistance. Les éléments courbes sollicités par des forces de déviation peuvent être concernés par des ruptures à l'effort tranchant.

2. Dans le cas d'éléments avec une courbure positive, donnant lieu à des contraintes de traction dans l'âme des éléments, la résistance à l'effort tranchant est potentiellement réduite si comparée à celle des éléments droits. Vice-versa, la résistance à l'effort tranchant des éléments avec une courbure négative, donnant lieu à des contraintes de compression dans l'âme des éléments, est potentiellement supérieure à celle des éléments droits.

3. Les tendances observées dans la série d'essais ont été expliquées avec succès par l'utilisation de la théorie de la fissure critique et en tenant compte de l'effet des forces de déviation générées par la courbure des éléments. Ces dernières influencent directement l'intensité de la force qui doit être transmise à travers la fissure critique.

4. La théorie de la fissure critique peut être adoptée pour la vérification à l'effort tranchant des éléments courbes. Pour ce faire, il faudra tenir compte de l'intensité et du sens (signe) de la force de déviation supplémentaire qui doit être transmise à travers la fissure critique.

5. Des différences quant à la position relative entre la bielle théorique (appui direct) et l'armature flexionnelle ont été mises en évidence en comparant les éléments courbes aux éléments droits. Cette observation justifie la prise en compte d'une position différente de la fibre de référence pour le calcul des résistances selon la théorie de la fissure critique. La prise en compte d'une position variable de la fibre de référence, en fonction de la courbure des éléments, conduit à des estimations des résistances d'avantage précises.

6. Les mêmes principes du modèle de la théorie de la fissure critique modifié pour la prise en compte des forces de déviation, ont été considérés pour l'analyse du comportement d'une série de spécimens non-prismatiques soumis à une sollicitation de flexion pure. Les résultats obtenus par cette analyse sont très satisfaisants, avec une prédiction généralement correcte des résistances et des modes de rupture observés.

Chapitre 5

Comportement d'angles de cadre soumis à une sollicitation d'ouverture

5.1 État de l'art et justification de l'étude

En particulier pendant les années '60 et '70, plusieurs auteurs ont étudié le comportement d'angles de cadre soumis à la fois à des sollicitations de fermeture (figures 5.1(a,c)) et d'ouverture (figures 5.1(b,d)). La plus grande partie des essais concerne des spécimens soumis à des chargements statiques (tableau 5.1), mais des recherches plus récentes ont permis d'investiguer également leur comportement en cas de sollicitations cycliques [Ang99, Cot94, Mcc95]. Cette section donne un aperçu des résultats obtenus dans les essais statiques pour des angles orthogonaux (amplitude de l'angle $\alpha = 90°$, qui constitue la quasi totalité des essais existants) ainsi que pour des angles non-orthogonaux ($\alpha \neq 90°$, pour lesquels peu d'essais sont disponibles à ce jour). Ces derniers présentent un intérêt particulier dans le cas de cette recherche car de nombreuses structures peuvent être concernées par des telles géométries (figure 1.5).

5.1.1 Comportement d'angles orthogonaux

De nombreux essais ont été effectués sur des spécimens orthogonaux ($\alpha = 90°$). Les figures 5.1(e-f) montrent un résumé des performances mécaniques obtenues en fonction du type de sollicitation (figure 5.1(e) pour les angles fermés et figure 5.1(f) pour les angles ouverts) et du taux d'armature mécanique des spécimens (ω). Ce dernier est défini par :

$$\omega = \rho \frac{f_y}{f_{cp}} = \frac{A_s}{b\,d} \frac{f_y}{f_{cp}} \tag{5.1}$$

où ρ est le taux d'armature flexionnelle, A_s la surface d'armature flexionnelle, b l'épaisseur du spécimen, d la hauteur statique de l'armature flexionnelle, f_y la contrainte d'écoulement des armatures flexionnelles et f_{cp} la résistance plastique du béton à la

Tab. 5.1: Campagnes d'essais effectuées sur des angles de cadre soumis à une sollicitation statique d'ouverture ou de fermeture

auteur(s)	$\alpha < 90°$	$\alpha = 90°$		$\alpha > 90°$
	ouverture	fermeture	ouverture	ouverture
Abdul-Wahab et al. [Abd89, Abd98, Abd99]	5		4	15
Akkermann [Akk00]		2		
Balint et al. [Bal72]		4	9	
Cranston [Cra65]		8		
Jackson [Jac95]			5	
Johansson [Joh01]		8	3	
Kordina et al. [Kor70, Kor76, Kor78, Kor84]		2	13	6
Lundgren [Lun99]		3		
Luo [Luo94]		27		
Mayfield et al. [May71, May72]		15	87	
Morrow [Mor57]		6[a]		
Nilsson [Nil73]	3		31	14
Noor [Noo77]			19	
Östlund [Ost63]		12		
Skettrup et al. [Ske84]			4	
Stucki et al. [?]		2		
Swann [Swa69]		5	12	
Van Dijk et al. [Van76]		27[b]	24	
Wästlund [Was35]			19	
nombre d'essais	8	121	230	35

a : dans cette série, 27 autres essais ont montré des ruptures prématurées à l'extérieur de l'angle
b : essais effectués sur cadres en béton armé

compression. Cette dernière peut être calculée à partir de la résistance moyenne à la compression du béton mesurée sur cylindre (f_{cm}, qui peut être dérivée de celle obtenue sur cube : $f_{cm} \approx 0.8\, f_{c,\text{cube}}$) et en considérant la fragilité des bétons à haute résistance (équation 2.2) [Mut97, Fib11].

L'appréciation des performances mécaniques peut se faire par le calcul du rapport entre le moment de flexion maximal introduit dans le spécimen avant la rupture (M_{max}, mesuré à l'intrados de la zone nodale en se référant à l'axe 1-1 de la figure 5.1(e)) et la résistance théorique à la flexion calculée par un calcul plastique (M_{flex}) :

$$M_{flex} = \omega\ f_{cp}\, b\, d^2 \left(1 - \frac{\omega}{2}\right) \tag{5.2}$$

Il faut souligner que les systèmes statiques utilisés pour les différentes séries d'essais ont des caractéristiques variables, en particulier en ce qui concerne le rapport entre le moment de flexion (M) et l'effort tranchant (V) introduits dans les spécimens ainsi que l'éventuelle présence d'un effort normal (N, de traction ou de compression) agissant dans la zone nodale. Une variabilité similaire peut également être observée au niveau de la taille des spécimens, des détails d'armature investigués ainsi que des propriétés des matériaux. Malgré ces différences, tous les essais ont été rassemblés dans les figures 5.1(e-f) afin d'effectuer une observation qualitative des résultats. La comparaison entre

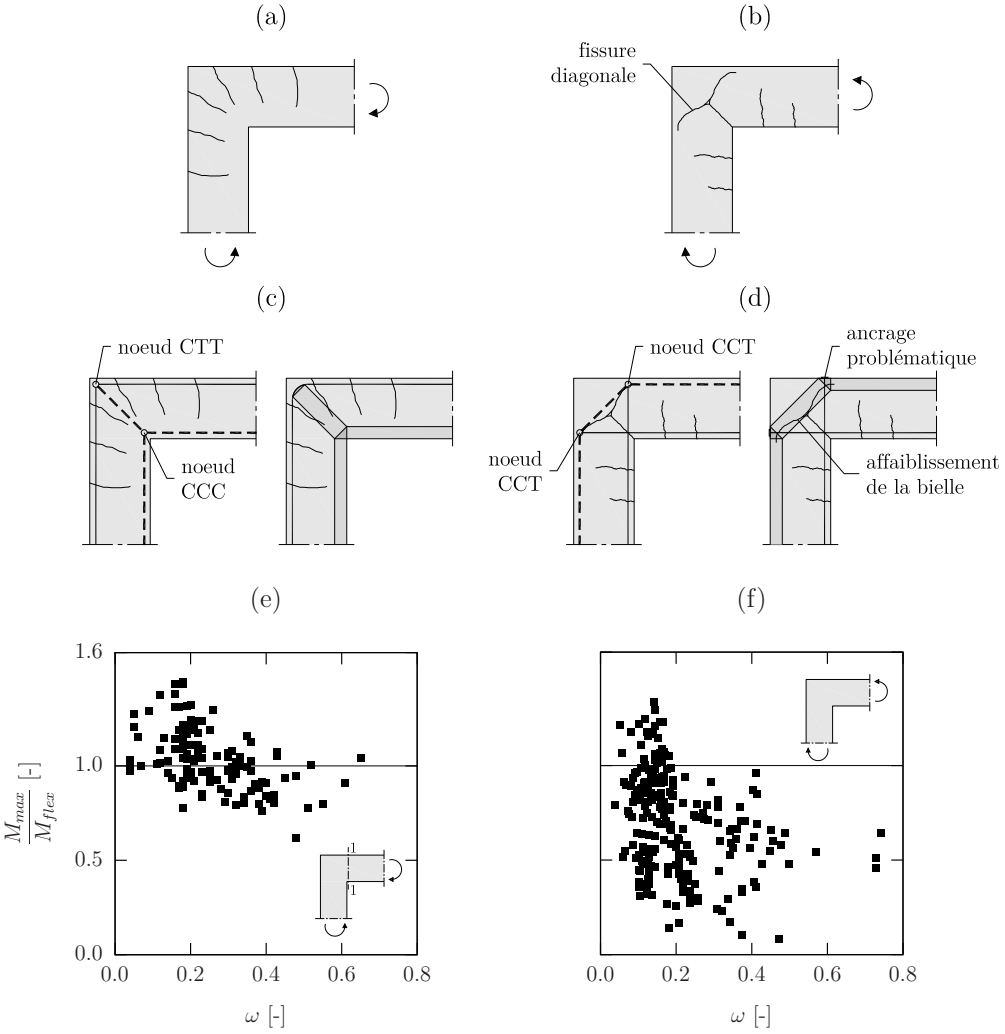


Fig. 5.1: Fissuration typiquement observée et idéalisation du comportement par un modèle bielles-et-tirants et un champ de contraintes rigide-plastique pour des angles orthogonaux soumis à une sollicitation : **(a,c)** de fermeture ; et **(b,d)** d'ouverture. Résultats des essais existants. Performance des spécimens en fonction du taux mécanique d'armature flexionnelle pour une sollicitation : **(e)** de fermeture (121 essais) ; et **(f)** d'ouverture (230 essais)

la figure 5.1(e) (angles soumis à une sollicitation de fermeture) et la figure 5.1(f) (angles soumis à une sollicitation d'ouverture) permet donc de faire les considérations suivantes :

– une dispersion importante des performances des spécimens est observée pour les deux cas de chargement. Cependant, cette dispersion est beaucoup plus importante pour le cas des angles soumis à une sollicitation d'ouverture (figure 5.1(f)). Certains spécimens montrent aussi des rapports M_{max}/M_{flex} amplement supérieurs à 1. Ceci s'explique principalement par le fait que les augmentations de la valeur de M_{flex}, résultant de la présence d'armatures secondaires ou de la capacité d'écrouissage des armatures flexionnelles, n'ont pas été considérées dans les calculs. Par conséquent, la valeur du

rapport M_{max}/M_{flex} est sur-estimée. De plus, d'éventuelles redistributions des efforts étaient possibles dans le cas des essais effectués sur des cadres en béton armé (se référer aux essais de Van Dijk et al. [Van76]), mais elles n'ont pas été considérées.

– L'efficacité des zones nodales (M_{max}/M_{flex}) a une tendance à diminuer avec l'augmentation du taux mécanique d'armature ($\omega = \rho f_y/f_{cp}$). Cette dernière peut être obtenue par l'augmentation du taux d'armature flexionnelle (ρ) ou de sa limite d'écoulement (f_y) qui peuvent conduire à l'augmentation des forces internes à dévier empêchant l'élément d'atteindre un comportement ductile, mais aussi par une diminution de la résistance plastique à la compression du béton (f_{cp}), qui affaibli la résistance des bielles.

– Les angles soumis à une sollicitation de fermeture montrent un comportement généralement satisfaisant, notamment pour des taux d'armature mécanique modérés. En effet, comme le montre la figure 5.1(c), les forces internes peuvent être déviées efficacement par le biais d'un noeud CTT (où les armatures de la zone tendue sont en équilibre avec une bielle de compression inclinée) et par un noeud CCC (formé uniquement par des bielles de compression) [Mut97].

– Les angles soumis à une sollicitation d'ouverture montrent par contre une efficacité largement réduite (figure 5.1(f)) et ceci pour toutes valeurs du taux mécanique d'armature flexionnelle (ω). La figure 5.1(d) met en avant que leur comportement est fortement influencé par la présence d'un noeud CCT [Mut97] (où la bielle de la zone comprimée doit être déviée par l'armature flexionnelle à l'endroit de son ancrage). La sensibilité de ce noeud justifie donc la dispersion observée dans l'efficacité des éléments (M_{max}/M_{flex}) où les conditions problématiques d'ancrage peuvent donner lieu à la formation d'une fissure diagonale dans la zone nodale (figures 5.1(b,d)). Cette dernière affaibli sensiblement la résistance à la compression de la bielle inclinée, menant ainsi à la rupture de l'angle de cadre. Pour ces raisons, la performance des angles soumis à une sollicitation d'ouverture montre une sensibilité importante au type d'armature flexionnelle (géométrie et conditions d'ancrage) ainsi qu'a la présence et aux caractéristiques de l'armature secondaire contrôlant la fissuration dans la zone nodale.

Les essais disponibles dans la littérature peuvent être analysés de façon plus détaillée, en particulier en étudiant l'influence du détail d'armature sur les performances des spécimens. Ceci a été fait pour les éléments soumis à une sollicitation d'ouverture. Les spécimens ont été séparés en cinq groupes définis par le type de détail de l'armature principale (armature flexionnelle, désignée par les indices A à E, voir figure 5.2(a)). Les spécimens de chacun de ces groupes ont ensuite été divisés en quatre sous-groupes définis selon le type d'armature secondaire (armature diagonale et/ou armatures transversales, désignés par les indices a à d, voir figure 5.2(b)). Des graphiques similaires à ceux des figures 5.1(e-f) sont montrés dans les figures 5.3(a-t) pour chacune des vingt combinaisons possibles. Les remarques suivantes peuvent être faites sur la base de ces graphiques :

– la dispersion observée dans les performances des spécimens se réduit avec la subdivision

selon le type de détail d'armature. Celle-ci reste toutefois assez conséquente.

– Les performances (M_{max}/M_{flex}) des angles sont améliorées par la mise en place d'une armature secondaire (détails types b à d). Cette armature permet en principe un meilleur contrôle de la fissuration ainsi qu'une efficacité accrue pour la déviation de la bielle dans la zone comprimée.

– Les détails types D et E (armatures flexionnelles en forme de boucle, voir figure 5.2(a)) montrent généralement les meilleures performances (figure 5.3(m-t)). Ces détails peuvent cependant se révéler problématiques en vue d'une application pratique.

– Comme montré aux figures 5.3(i-l), le détail type C, caractérisé par l'ancrage des armatures flexionnelles dans la zone comprimée (figure 5.2(a)), montre généralement des mauvaises performances. Ce détail reste tout de même intéressant pour sa praticité de mise en place

– Des performances insatisfaisantes sont aussi observées pour les détails types A et B (figure 5.2(a)). Le premier type montre cependant des grandes améliorations en cas d'ajout d'une armature secondaire (figures 5.3(b-d)).

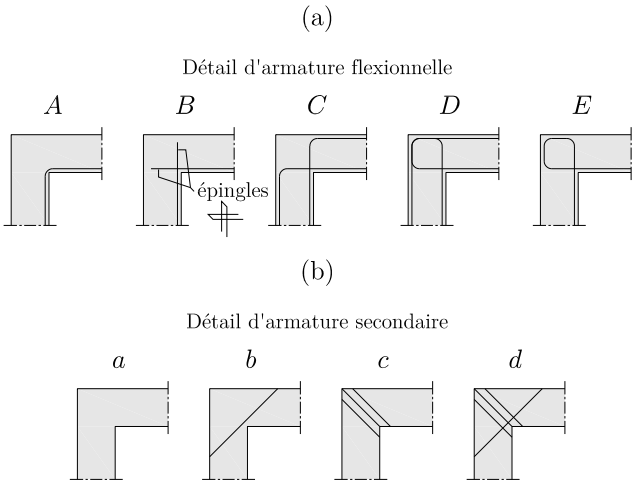


Fig. 5.2: Désignation des détails types pour : **(a)** l'armature flexionnelle ; et **(b)** l'armature secondaire

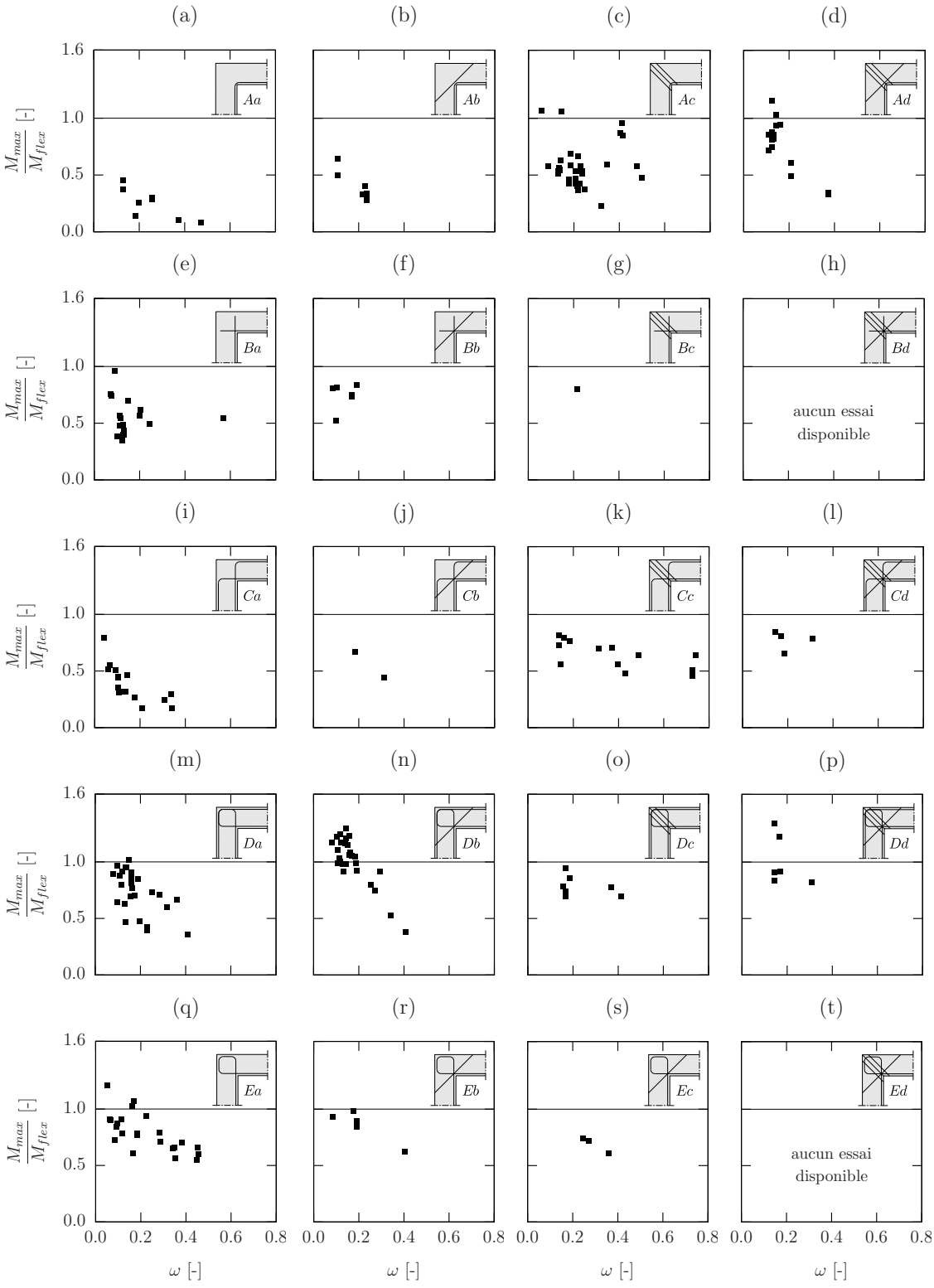


Fig. 5.3: Résultats des essais existants sur angles orthogonaux soumis à une sollicitation d'ouverture. Performance des spécimens en fonction du taux mécanique d'armature flexionnelle pour les détails types : **(a-d)** *A* (68 essais) ; **(e-h)** *B* (27 essais) ; **(i-l)** *C* (37 essais) ; **(m-p)** *D* (67 essais) ; et **(q-t)** *E* (31 essais)

5.1.2 Comportement d'angles non orthogonaux

Comme illustré aux figures 5.1(e-f), le nombre d'essais effectués sur des angles orthogonaux est très important. Ceci n'est pas le cas pour des géométries différentes, avec des angles obtus ou aigus. Cependant, ces géométries s'avèrent souvent utilisées dans la pratique, en particulier pour le cas des angles obtus ($\alpha > 90°$, voir figure 1.5).
Des essais sur des spécimens avec une amplitude de l'angle $\alpha \neq 90°$ et soumis à une sollicitation d'ouverture ont été effectuées par Abdul-Wahab et al. [Abd89, Abd98, Abd99], Kordina et al. [Kor76] et Nilsson [Nil73]. Les résultats obtenus dans ces essais sont illustrés à la figure 5.4. Ces résultats montrent que les conclusions principales faites pour les angles orthogonaux, notamment au sujet de l'influence du taux d'armature mécanique (ω) et des armatures secondaires, restent applicables. Cependant, certains différences peuvent être mises en évidence. Ceci est montré à la figure 5.5 dans laquelle l'influence de l'amplitude de l'angle α est étudiée pour les détails d'armature de type C (figures 5.5(a)) et D (figures 5.5(b)). Ces figures montrent que les deux types de détail atteignent des performances moindres pour des amplitudes de l'angle α comprises entre 90° et 120°. Par contre, l'efficacité des spécimens s'améliore pour d'autres types d'amplitudes de l'angle (inférieures à 90° ou supérieures à 120°). Cette tendance a été mise en évidence en particulier par les travaux de Abdul-Wahab et al. [Abd89, Abd98, Abd99] qui ont testé des spécimens avec des détails d'armature identiques (de type Da et Db) mais avec des amplitudes de l'angle α variables (figure 5.5(c)). Les phénomènes qui peuvent expliquer cette tendance sont multiples et complexes. A ce sujet, la figure 5.6 montre que des différences dans l'amplitude de l'angle α impliquent des variations considérables au niveau :

- de la géométrie et des conditions d'ancrage des armatures flexionnelles (figure 5.6(a))
- de l'effet des armatures secondaires (figure 5.6(a))
- de l'amplitude de la déviation exigée par les bielles de la zone comprimée (angles β_{60}, β_{90} et β_{120}, voir figure 5.6(b))
- de l'inclinaison relative entre bielles et tirants (figure 5.6(b))
- de la distance entre la bielle inclinée et le noeud interne de l'élément (zone tendue où la première fissure de flexion se forme, distances z_{60}, z_{90} et z_{120}, voir figure 5.6(b))
- de l'intensité des efforts agissant dans les bielles inclinées (forces $F_{c,60}$, $F_{c,90}$ et $F_{c,120}$, voir figure 5.6(b))

L'efficacité du détail type C, particulièrement intéressant du point de vue pratique, sera étudiée dans le cadre de cette recherche. Ce détail se montre très problématique dans le cas des angles orthogonaux (figures 5.3(i-l)), mais montre également un potentiel important d'amélioration en cas de mise en place d'armatures secondaires (figures 5.3(k-l) et 5.4(a)) et surtout pour des amplitudes de l'angle $\alpha > 90°$ (figure 5.5(a)). Son utilisation pourrait donc se justifier pour cette géométrie particulière. Pourtant, malgré l'intérêt de cette problématique pour la conception de nombreuses structures (figure

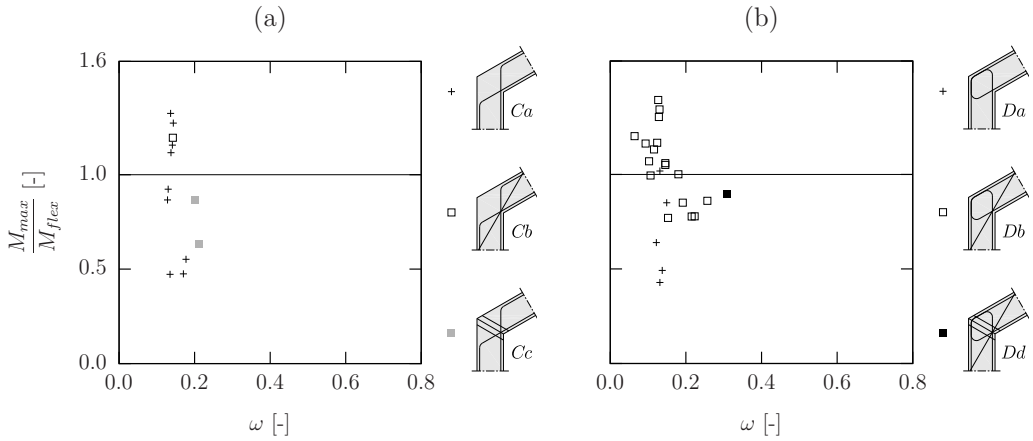


Fig. 5.4: Résultats des essais existants sur angles obtus soumis à des sollicitations d'ouverture. Performance des spécimens en fonction du taux mécanique d'armature flexionnelle pour les détails types : **(a)** *C* (12 essais) ; et **(b)** *D* (23 essais)

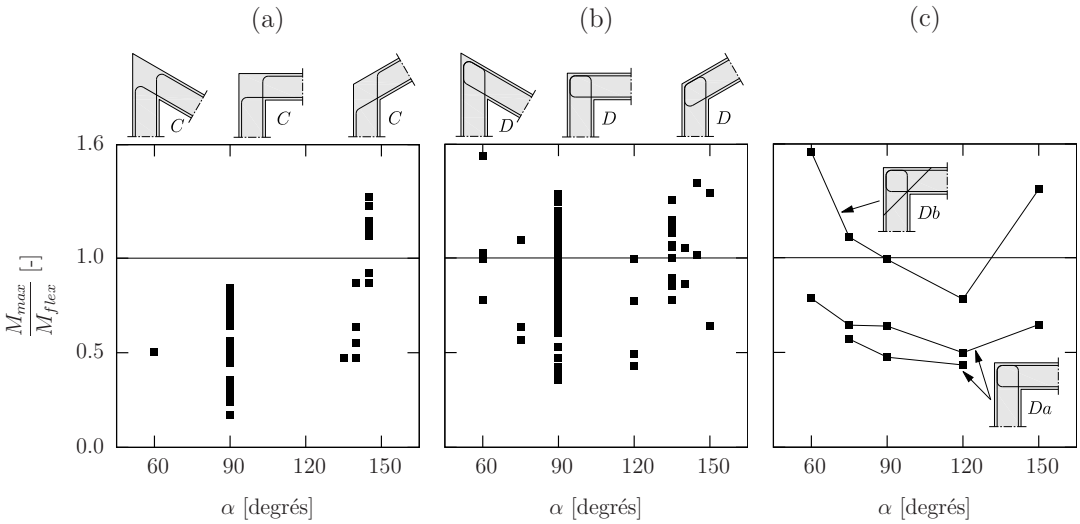


Fig. 5.5: Résultats des essais existants sur angles soumis à une sollicitation d'ouverture. Performance des spécimens en fonction de l'amplitude de l'angle α pour des détails de type : **(a)** *C* (50 essais) ; **(b)** *D* (97 essais) ; et **(c)** *D* (séries d'essais conduites par Abdul-Wahab et al. [Abd89, Abd98, Abd99])

1.5), les données expérimentales actuellement à disposition restent limitées. De plus, la totalité des essais existants a été effectuée sur des spécimens avec des hauteurs de section réduites ($h \leq 200$ mm). Pour les spécimens dont le comportement est influencé de manière significative par la résistance à la traction du béton, ceci pourrait conduire à des sur-estimations de leur capacité. Pour toutes ces raisons, une campagne expérimentale a été effectuée afin d'identifier des détails d'armature efficaces pour des spécimens obtus ($\alpha = 125°$) à grande échelle ($h = 400$ mm) et soumis à des sollicitations d'ouverture. Une attention particulière à été accordée à l'étude des performances d'un détail type *C* en combinaison avec une armature secondaire de type *c*.

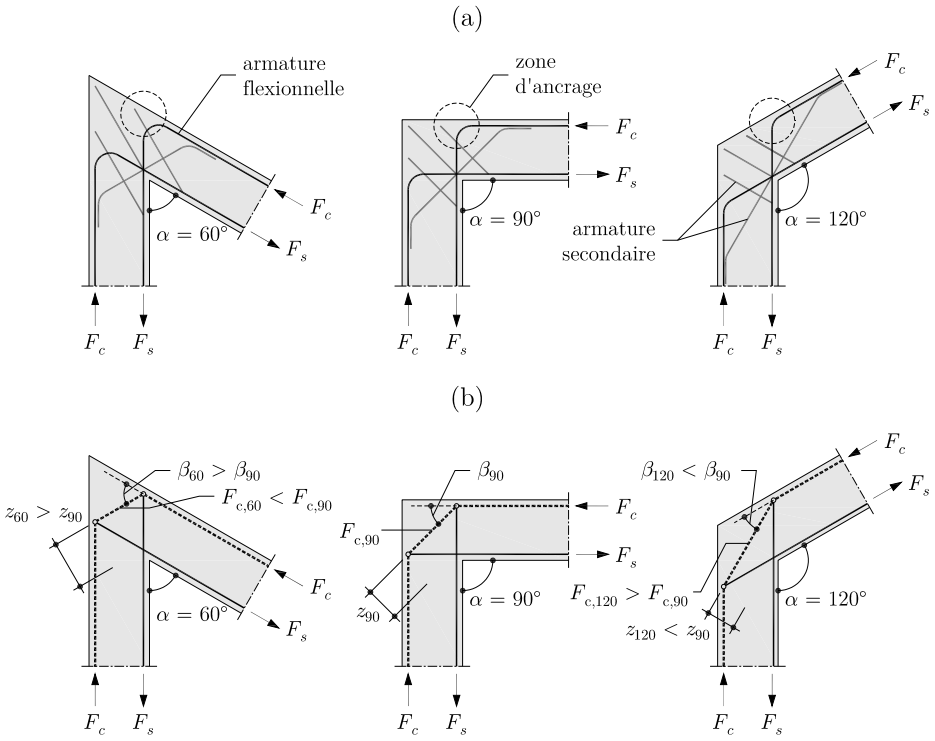


Fig. 5.6: Influence de l'amplitude de l'angle α sur les conditions de la zone nodale pour d'angles soumis à une sollicitation d'ouverture : **(a)** effets géométriques sur l'armature et la zone d'ancrage ; et **(b)** effets sur les caractéristiques du modèle bielles-et-tirants

5.2 Campagnes d'essais

5.2.1 Série préliminaire d'essais

Objectifs et spécimens de la série d'essais

Une série préliminaire d'essais a été effectuée pour étudier le comportement des angles en fonction du type de sollicitation. Les propriétés des spécimens et les résultats obtenus dans cette série d'essais sont décrits de manière détaillée dans le rapport d'essai [Cam11a].

La série d'essai comprenait quatre spécimens obtus ($\alpha = 125°$) à grande échelle (avec une hauteur de la section $h = 400$ mm et une épaisseur $b = 300$ mm) fabriqués avec un béton de résistance normale (f_{cm} compris entre 32.5 et 36.4 MPa, diamètre maximal des granulats $d_g = 16$ mm). La géométrie des quatre spécimens, leur condition de charge et leur détail d'armature sont montrés à la figure 5.7. La forme des spécimens, avec deux parties en porte-à-faux (parties supérieure et inférieure des spécimens), a été imposée par la nécessité d'appliquer des chargements excentrés par rapport à la zone nodale (partie centrale des spécimens). Le tableau 5.2 résume les caractéristiques géométriques des spécimens, les conditions de mise en charge ainsi que les caractéristiques de l'armature : l'amplitude de l'angle (α), l'épaisseur (b) et la hauteur (h) de la section, la hauteur sta-

tique de l'armature flexionnelle (d), l'excentricité de la charge (e), le type d'action sur la zone nodale, le taux d'armature flexionnelle (ρ), le taux d'armature transversale dans la région à l'extérieur de la zone nodale (ρ_w) ainsi que la quantité de goujons d'angle. Le tableau 5.3 résume les caractéristiques des matériaux : les résistances moyennes à la compression (f_{cm}) et à la traction (f_{ctm}) du béton ainsi que les limites d'écoulement de l'armature flexionnelle (f_y), de l'armature transversale disposée à l'extérieur de la zone nodale (f_{yw}) et des goujons d'angle (f_{ywn}).

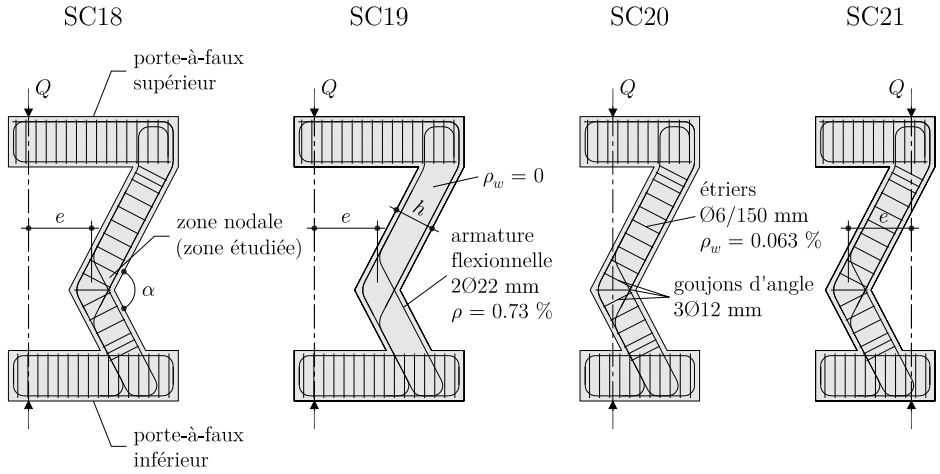


Fig. 5.7: Spécimens de la série préliminaire d'essais : géométrie, caractéristiques de l'armature et conditions de charge

Tab. 5.2: Caractéristiques des spécimens de la série préliminaire d'essais : géométrie, armature et conditions de charge

spécimen	α	b [mm]	h [mm]	d [mm]	e [mm]	action sur l'angle	ρ [%]	ρ_w [%]	goujons d'angle
SC18	125°	302	401	349	-625	ouverture	0.73[a]	0.063	3 Ø 12 mm
SC19	125°	303	401	349	-625	ouverture	0.73[a]	-	-
SC20	125°	303	401	349	0	compression	0.73[a]	0.063	3 Ø 12 mm
SC21	125°	301	400	349	+625	fermeture	0.73[a]	0.063	3 Ø 12 mm

a : ρ peut être localement plus élevé (à cause des recouvrements des armatures [Cam11a])

Les paramètres étudiés par cette série d'essais sont les suivants :

– importance de l'excentricité du chargement (e) : comme le montre la figure 5.7, l'excentricité de la charge (Q) par rapport à l'axe de la zone nodale a été variée afin d'étudier le comportement de la zone nodale sous différentes configurations de charge. Les spécimens SC18 et SC19 ont été soumis à une flexion provoquant l'ouverture de l'angle, le spécimen SC20 a été chargé sans excentricité ($e = 0$, $M = 0$) et le spécimen SC21 a été soumis à une flexion provoquant la fermeture de l'angle. Il faut noter que tous les spécimens étaient soumis à des efforts de flexion (M) mais également à des efforts tranchants (V) et à des efforts normaux de compression (N) dans la zone nodale [Cam11a].

– Efficacité d'un faible taux d'armature transversale (ρ_w) : un faible taux d'armature $\rho_w = 0.063\%$ a été placé dans la zone rectiligne à l'extérieur de la zone nodale de trois spécimens (SC18, SC20 et SC21, voir figure 5.7). Ce taux d'armature est sensiblement inférieur à celui préscrit par la norme suisse SIA 262 [Sia03] et également à ceux préscrit par d'autres normes [Aci08, Eur04, Fib11]. Le spécimen SC19 ne disposait d'aucune armature transversale.

– Pertinence du détail d'armature : une armature flexionnelle de type C (figure 5.2(a)) a été utilisée pour tous les spécimens. L'armature flexionnelle était composée de deux barres de diamètre 22 mm. Ceci donne un taux nominal d'armature flexionnelle $\rho = 0.73\%$ (calculé sans considérer les recouvrements d'armature [Cam11a]). Ce détail d'armature se caractérise par sa praticité d'utilisation mais ses performances doivent encore être vérifiées, en particulier pour les angles soumis à une sollicitation d'ouverture (voir section 5.1). Sa pertinence vis-à-vis du type de sollicitation de la zone nodale est donc étudiée par cette série d'essais.

Tab. 5.3: Caractéristiques des matériaux de la série préliminaire d'essais

spécimen	f_{cm} [a] [mm]	f_{ctm} [b] [MPa]	f_y [MPa]	f_{yw} [MPa]	f_{ywn} [MPa]
SC18	32.5	2.47	577	646[c]	538
SC19	36.3	2.77	577	-	-
SC20	32.9	2.47	577	646[c]	538
SC21	36.4	2.77	577	646[c]	538

a : mesurée sur cylindre le jour de l'essai
b : mesurée sur cylindre à l'âge de 28 jours
c : acier écrouis à froid (limite d'écoulement définie comme celle pour laquelle la déformation plastique résiduelle, suite à une décharge élastique, est égale à 0.2%).

Discussion des résultats

La figure 5.8(a) montre la relation entre la charge appliquée (Q) et la valeur absolue de la rotation relative de l'angle ($|\psi_{rel}|$) mesurée pour chaque spécimen. La rotation relative de l'angle a été calculée à partir des mesures effectuées avec des inclinomètres placés dans les parties en porte-à-faux des spécimens (figure 5.8(a)) [Cam11a]. La figure 5.8(b) montre l'état de fissuration observé à la rupture des spécimens. Aussi, le tableau 5.4 résume les résultats des essais en indiquant la charge (Q_{max}) et le moment (M_{max}) maximales introduites dans les spécimens ainsi que les rapports M_{max}/M_{flex} et les types de ruptures obtenus. Sur la base de ces résultats, les considérations suivantes peuvent être faites :

– l'essai effectué sur le spécimen SC21 a confirmé que le détail d'armature proposé (type Cc) est bien adapté pour garantir un comportement ductile sous l'action d'une flexion provoquant la fermeture de l'angle.

– L'essai sans excentricité de la charge, effectué sur le spécimen SC20, a montré qu'une rupture prématurée d'effort tranchant à caractère fragile à l'extérieur de la zone nodale est possible. Une rupture de ce type ne peut donc pas être exclue par la mise en place d'un faible taux d'armature transversale ($\rho_w = 0.063\%$) dans cette zone.

– Une comparaison entre les spécimens SC20 et SC21 montre qu'une excentricité qui provoque la fermeture de l'angle est bénéfique car elle permet d'augmenter la ductilité de l'élément.

– Le comportement observé pour les spécimens SC18 et SC19, soumis à une flexion provoquant l'ouverture de l'angle, n'est pas satisfaisant. Ces résultats montrent clairement la nécessité d'un contrôle plus efficace de l'ouverture de la fissure diagonale dans la zone d'angle (figures 5.1(b,d) et 5.8(b)). La mise en place de trois goujons dans l'angle n'a pas permis d'obtenir un comportement efficace des spécimens car ces derniers ont été affectés par un défaut d'ancrage. En effet, le croisement de ces goujons avec l'armature flexionnelle donne lieu à un noeud TTT (formé uniquement par des tirants qui se transmettent les efforts) à l'endroit où une fissure de flexion se forme. A cause de cette fissure, l'ancrage des goujons n'est pas efficace et ne peut pas être totalement garanti. Ce type de noeud, comme il a été confirmé par le mauvais comportement de l'essai SC18, doit donc absolument être évité [Mut97].

– La série préliminaire d'essais a clairement démontré que la résistance et la capacité de déformation des angles dépendent directement du type de chargement appliqué.

Tab. 5.4: Résultats de la série préliminaire d'essais : résistances mesurées et types de rupture observés

spécimen	Q_{max} [kN]	M_{max} [kN]	M_{flex} [-]	$\frac{M_{max}}{M_{flex}}$ [-]	type de rupture observé
SC18	97	60.6	144.6[a]	0.42	fissure diagonale dans la zone nodale (défaut d'ancrage des goujons d'angles)
SC19	59	36.9	145.8[a]	0.25	fissure diagonale dans la zone nodale (absence d'armature transversale)
SC20[b]	350	-[b]	145.5[a]	-[b]	effort tranchant (à l'extérieur de la zone nodale)
SC21	347	216.9	209.8[c]	1.03	flexion (écrasement de la zone comprimée)

a : M_{flex} calculé avec $\rho = 0.73\%$
b : pas d'excentricité de la charge ($M = 0$), calcul du rapport M_{max}/M_{flex} pas possible
c : M_{flex} calculé avec $\rho = 1.09\%$ (pour considérér le recouvrement des armatures dans la zone tendue [Cam11a])

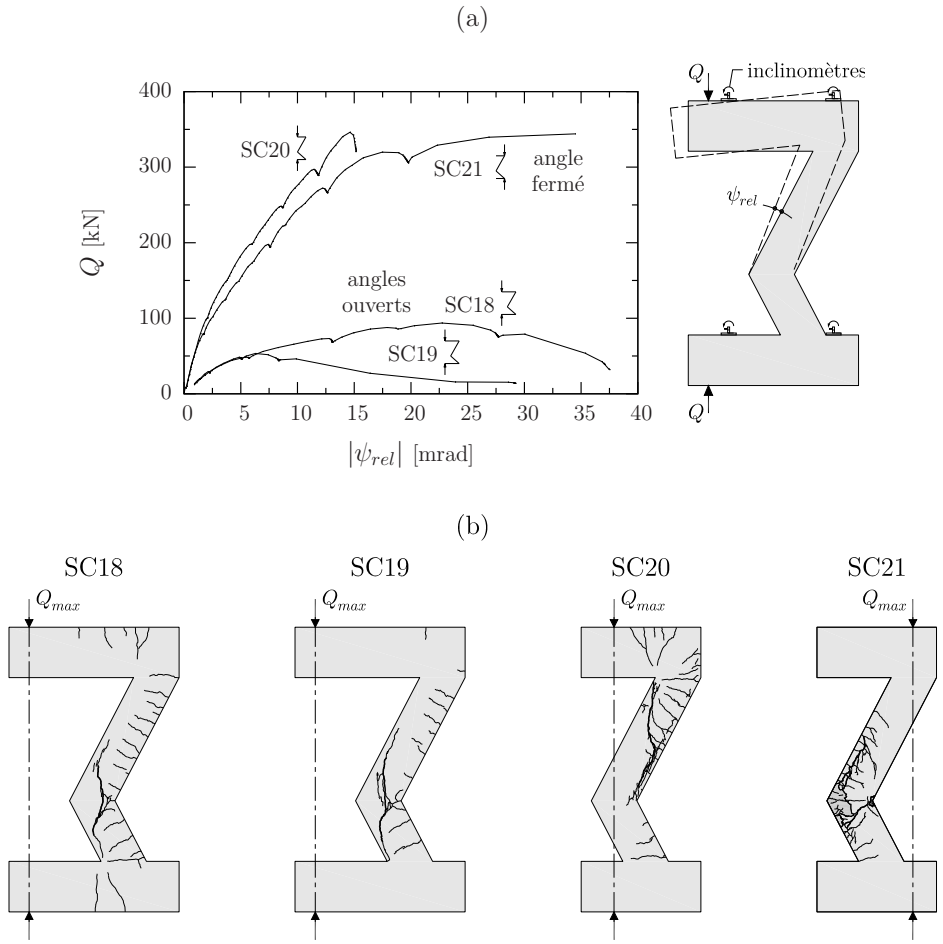


Fig. 5.8: Résultats de la série préliminaire d'essais : **(a)** relations mesurées entre la charge appliquée (Q) et la valeur absolue de la rotation relative de l'angle ($|\psi_{rel}|$) ; et **(b)** fissuration observée à la rupture des spécimens

5.2.2 Série principale d'essais

Objectifs et spécimens de la série d'essais

Les résultats de la série préliminaire d'essais ont montré qu'une étude approfondie était nécessaire afin de trouver des détails d'armature plus adaptés à une sollicitation d'ouverture des angles. Une nouvelle série d'essais, composée de seize spécimens obtus ($\alpha = 125°$) à grande échelle (avec une hauteur de la section $h = 400$ mm et une épaisseur $b = 300$ mm) a donc été réalisée. Les propriétés des spécimens fabriqués avec un béton à résistance normale, avec une résistance moyenne à la compression (f_{cm}) comprise entre 30.8 et 42.1 MPa et un diamètre maximal des granulats $d_g = 16$ mm, et les résultats obtenus dans cette série d'essais sont décrits de manière détaillée dans le rapport d'essai [Cam11b]. Le bâti de charge (flexion quatre points) est montré à la figure 5.9(a). Tous les spécimens ont été soumis à une flexion (M) provoquant l'ouverture de l'angle. Avec ce système de mise en charge, et contrairement à la série préliminaire (voir section

5.2.1), aucun autre effort (V ou N) n'agissait dans la zone nodale.

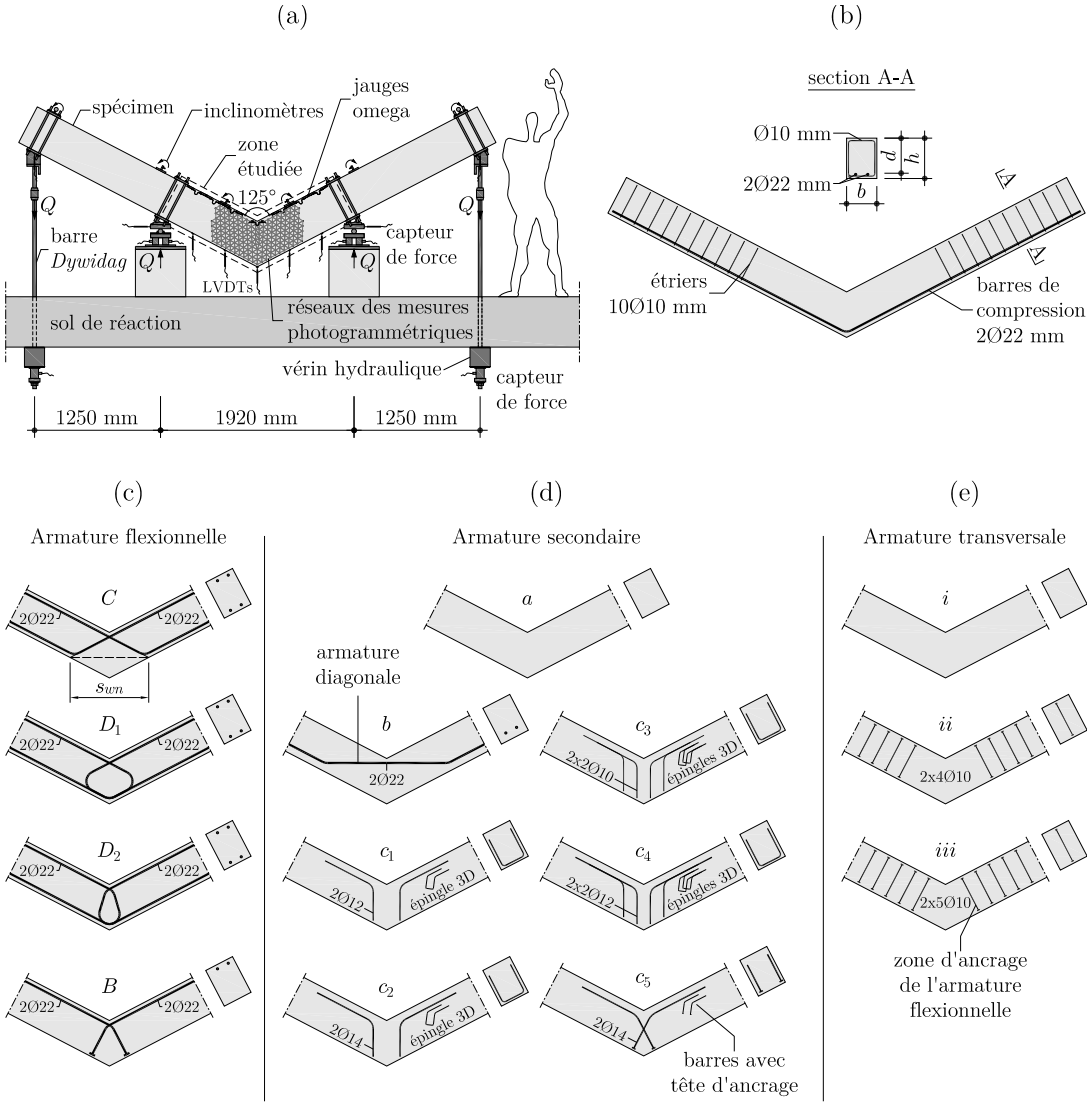


Fig. 5.9: Série principale d'essais : **(a)** bâti de charge et mesures effectuées ; **(b)** caractéristiques de l'armature constructive ; **(c)** détails types pour l'armature flexionnelle ; **(d)** détails types pour l'armature secondaire ; et **(c)** détails types pour l'armature transversale

Le seul paramètre qui a été varié entre les spécimens est le détail d'armature dans la zone étudiée (zone nodale). Les autres caractéristiques étaient identiques pour tous les spécimens. Les caractéristiques géométriques sont résumées dans le tableau 5.5 : amplitude de l'angle (α), épaisseur (b) et hauteur (h) de la section et hauteur statique de l'armature flexionnelle (d). Ce tableau résume également les surfaces d'armature flexionnelle (A_s) et d'armature transversale dans la région nodale (A_{swn}) de chaque spécimen. La quantification de la surface totale d'armature transversale est faite en tenant compte de toutes les barres qui sont coupées par la ligne diagonale de la zone nodale (s_{wn}), qui est montré à la figure 5.9(c). Ce choix est fait parce que, comme il sera

démontré plus loin, c'est premièrement l'armature disposée dans cette zone qui contribue à l'amélioration des performances des éléments testés. La longueur de la diagonale (s_{wn}), qui dépend de la hauteur statique du spécimen (d) et de l'amplitude de l'angle α, peut être calculée selon :

$$s_{wn} = \frac{d}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \tag{5.3}$$

Sur la base de la quantité d'armature disposée dans la zone nodale, un taux d'armature transversale peut être défini selon :

$$\rho_{wn} = \frac{A_{swn}}{b\, s_{wn}} \tag{5.4}$$

Aussi, il est utile de définir le taux mécanique d'armature transversale dans la zone nodale (ω_{wn}), car la limite d'écoulement des armatures transversales (f_{ywn}) et la résistance à la compression du béton (f_{cp}) jouent également un rôle important sur le comportement des éléments :

$$\omega_{wn} = \rho_{wn}\frac{f_{ywn}}{f_{cp}} = \frac{A_{swn}}{b\, d}\,\frac{f_{ywn}}{f_{cp}}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{5.5}$$

Les valeurs des taux d'armature flexionnelle (ω) et transversale (ω_{wn}) sont également résumées dans le tableau 5.5.
L'armature flexionnelle de tous les spécimens était formée par deux barres de diamètre 22 mm, donnant un taux nominal d'armature flexionnelle $\rho = 0.7\%$ (calculé avec la valeur nominale de la hauteur statique de l'armature $d = 360$ mm et sans considérer d'éventuelles augmentations apportées par une armature secondaire). Comme montré à la figure 5.9(b), l'armature constructive était aussi composée de deux barres continues de diamètre 22 mm disposées dans la zone comprimée et d'une sérié d'étriers disposée dans les zones en porte-à-faux.
Les figures 5.9(c-e) montrent les différentes types d'armature (flexionnelle, secondaire et transversale) utilisés pour la composition du détail d'armature de chaque spécimen :

– quatre variantes ont été utilisées pour l'armature flexionnelle. Ces variantes, montrées à la figure 5.9(c), sont nommées avec les indices B, C et D_1 à D_2 (ces indices sont en relation avec ceux déjà utilisés dans la section 5.1, voir figure 5.2(a))

– Sept variantes ont été utilisées pour l'armature secondaire (le terme d'armature secondaire se réfère à une armature transversale ou diagonale placée dans la zone nodale). Ces variantes, désignées avec les indices a, b et c_1 à c_5 (en relation aux indices de la figure 5.2(b)), sont montrées à la figure 5.9(d).

– Trois variantes ont été utilisées pour l'armature transversale. Ces trois variantes, indiquées avec les indices i à iii sont montrées à la figure 5.9(e). Il faut noter que la différence entre les variantes ii et iii (utilisées uniquement en superposition au détail principal de type C) consiste dans la mise en place d'un goujons supplémentaire dans

la zone d'ancrage de chaque armature flexionnelle. L'effet de ce goujon supplémentaire est analysé par cette série d'essais et sera discuté plus loin.

Tab. 5.5: Caractéristiques des spécimens de la série principale d'essais : type de détail d'armature, géométrie et taux d'armature

spécimen	détail	α [degrés]	b [mm]	h [mm]	d [mm]	A_s [mm^2]	A_{swn} [mm^2]	ω [-]	ω_{wn} [-]
SC22	Cai	125	300	400	351	760	-	0.101	-
SC23	Cbi	125	300	400	351	760	-	0.100	-
SC26	D_1ai	125	300	400	359	760	-	0.097	-
SC27	D_1bi	125	300	400	355	760	-	0.099	-
SC30	D_2ai	125	300	400	354	760	-	0.098	-
SC31	D_2bi	125	300	400	359	760	-	0.097	-
SC34	Bai	125	300	400	351	760	-	0.100	-
SC35	Bbi	125	300	400	351	760	-	0.099	-
SC38	Cc_1ii	125	300	400	360	760	452	0.114	0.035
SC39	Cc_1iii	125	300	400	357	760	609	0.116	0.047
SC40	Cc_2ii	125	300	400	361	760	616	0.115	0.048
SC41	Cc_2iii	125	300	400	363	760	773	0.114	0.060
SC42	Cc_3iii	125	300	400	358	760	785	0.115	0.063
SC43	Cc_4iii	125	300	400	360	760	1062	0.115	0.082
SC44	Cc_5ii	125	300	400	363	760	616	0.114	0.048
SC45	Cc_5iii	125	300	400	360	760	773	0.115	0.061

Tab. 5.6: Caractéristiques des matériaux de la série principale d'essais

spécimen	détail	f_{cm} [a] [Mpa]	f_{ctm} [b] [Mpa]	f_y [Mpa]	f_{yw} [Mpa]	f_{ywn} [Mpa]
SC22	Cai	40.5	3.63	515	-	-
SC23	Cbi	41.1	3.63	515	-	-
SC26	D_1ai	41.9	3.63	515	-	-
SC27	D_1bi	41.6	3.63	515	-	-
SC30	D_2ai	42.0	3.63	515	-	-
SC31	D_2bi	41.7	3.63	515	-	-
SC34	Bai	41.4	3.63	515	-	-
SC35	Bbi	42.1	3.63	515	-	-
SC38	Cc_1ii	31.3	2.53	500	568	555[c]
SC39	Cc_1iii	31.1	2.53	500	568	555[c]
SC40	Cc_2ii	30.9	2.53	500	568	560[c]
SC41	Cc_2iii	30.9	2.53	500	568	560[c]
SC42	Cc_3iii	31.0	2.53	500	568	575[c]
SC43	Cc_4iii	31.1	2.53	500	568	555[c]
SC44	Cc_5ii	30.9	2.53	500	568	560
SC45	Cc_5iii	30.8	2.53	500	568	560

a : mesurée sur cylindre le jour de l'essai
b : mesurée sur cylindre à l'âge de 28 jours
c : acier écrouis à froid (limite d'écoulement définie comme celle pour laquelle la déformation plastique résiduelle, suite à une décharge élastique, est égale à 0.2%.

D'avantage d'informations concernant les propriétés des détails d'armature (position, diamètre et rayons de pliage des barres) sont données aux figures 5.10 et 5.11. Le tableau 5.6 résume les caractéristiques des matériaux : les résistances moyennes à la compression (f_{cm}) et à la traction (f_{ctm}) du béton ainsi que les limites d'écoulement de l'armature flexionnelle (f_y), de l'armature transversale (f_{yw}) et de l'armature transversale de la zone nodale (f_{ywn}).
Avec les seize spécimens composant cette série d'essais, différents paramètres ont été analysés. Une description détaillée de tous ces paramètres et de toutes les comparaisons effectuées peut être consultée dans le rapport d'essais [Cam11b]. Les seize spécimens étaient partagés en deux groupes de huit visant à des objectifs distincts :

– l'objectif du premier groupe (composé par les spécimens SC22-23, SC26-27, SC30-31 et SC34-35, voir figure 5.10) était d'étudier l'effet de la géométrie de l'armature flexionnelle et d'identifier une disposition d'armature permettant des performances satisfaisantes. La recherche de ces performances a été faite sans l'ajout d'armatures supplémentaires dans la zone nodale. Le comportement de quatre géométries différentes de l'armature flexionnelle a été analysé (types B, C et D_1 à D_2 respectivement dans les spécimens SC34, SC22, SC26 et SC30, voir figures 5.9(c) et 5.10). De plus, l'effet d'une armature diagonale placée dans la zone nodale (armature secondaire de type b, voir figure 5.9(d)) a été étudié pour chacune de ces quatre géométries (avec les spécimens SC35, SC23, SC27 et SC31, voir figure 5.10).

– L'objectif du deuxième groupe (composé par les spécimens SC38-45, voir figure 5.11) était d'étudier l'effet d'une armature secondaire (transversale, type c) placée dans la zone nodale. Cet effet a été étudié uniquement pour le détail d'armature flexionnelle de type C, déjà utilisé pour les spécimens SC22 et SC23 qui représentent donc des essais de référence. Cette solution d'armature (type Cc) c'est déjà montrée appropriée dans le cas d'une sollicitation de fermeture de l'angle [Cam10, Cam11a] (voir section 5.2.1). Comme déjà mis en avant précédemment, ce détail montre un potentiel d'amélioration intéressant pour des angles d'amplitude $\alpha > 90°$ munis d'une armature secondaire dans la zone nodale et soumis à une sollicitation d'ouverture. Le but de ce deuxième groupe de spécimens était donc d'identifier des solutions d'armature pour améliorer le comportement du détail type C face à une sollicitation d'ouverture de l'angle. L'atteinte de cet objectif permettrait l'utilisation du même détail d'armature indépendamment du type de chargement, ce qui pourrait s'avérer très utile en cas de sollicitations cycliques de la structure [Ang99, Cot94, Mcc95]. Différents types d'armature secondaire ont été analysés avec ces huit spécimens (armature secondaire de type c_1 à c_5 couplée avec une armature transversale de type ii à iii, voir figures 5.9(d-e) et 5.11). Il faut souligner que avec les variantes proposées, la formation problématique de noeuds TTT [Mut97] a été évitée.

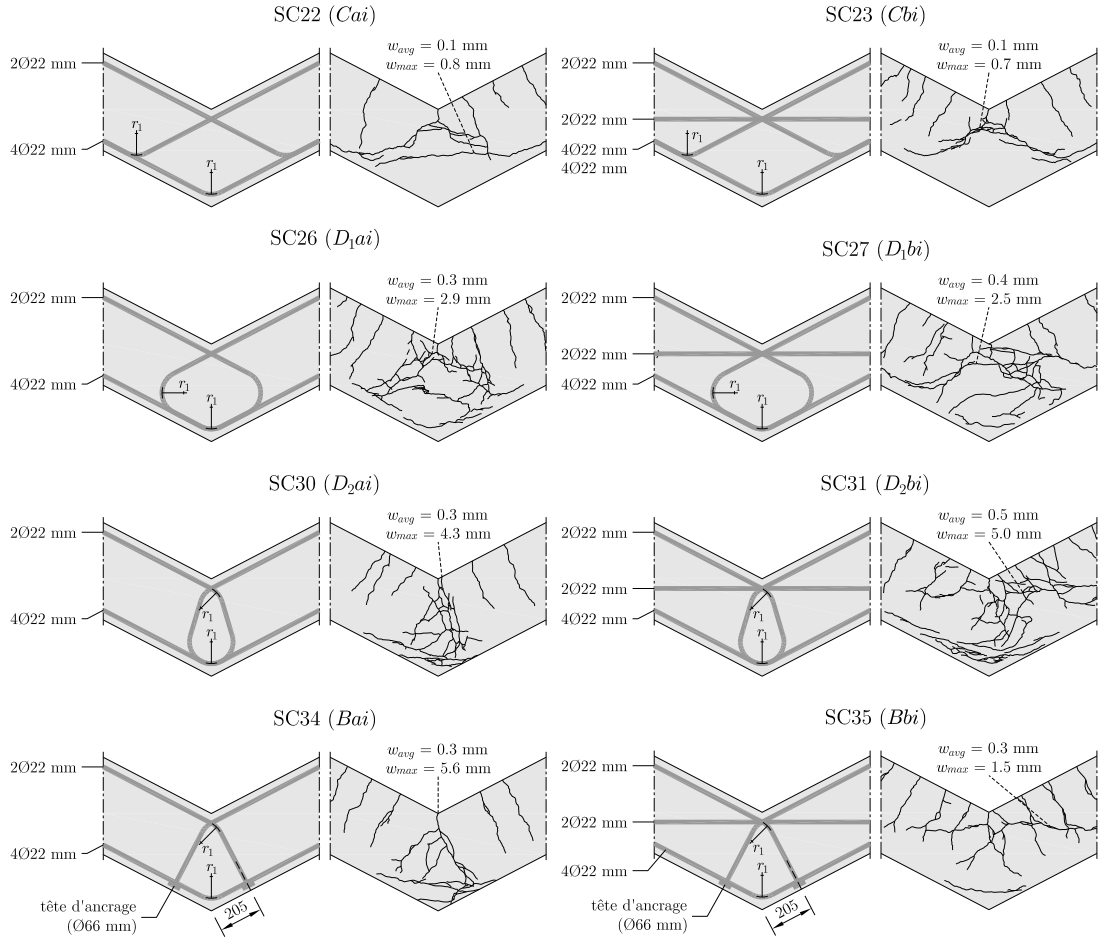
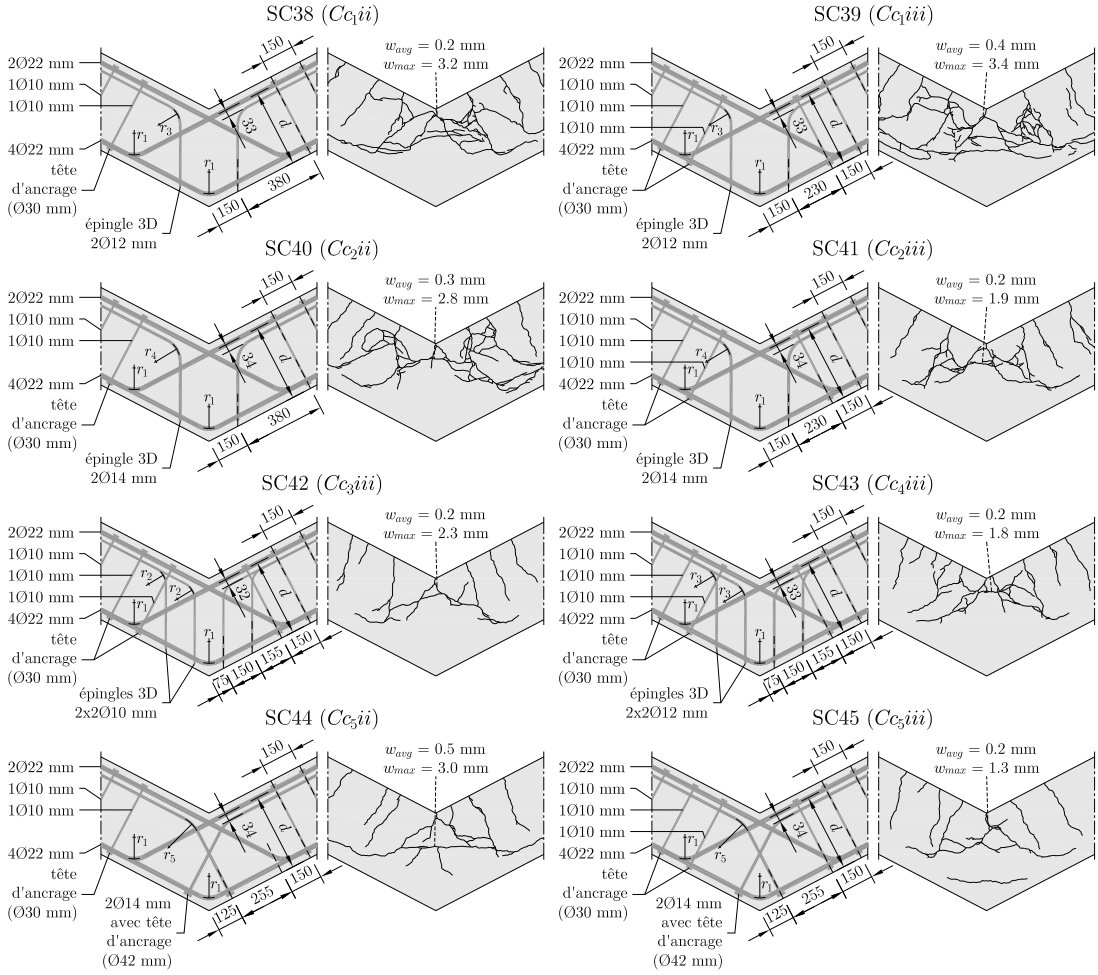


Fig. 5.10: Spécimens du premier groupe de la série principale d'essais : caractéristiques du détail d'armature dans la zone nodale (position, diamètre et rayon de pliage des barres) et fissuration observée à la rupture

Discussion des résultats

Les figures 5.10 et 5.11 montrent l'état de fissuration observé à la rupture des spécimens. Les résistances obtenues (M_{max}) sont résumées dans le tableau 5.7. Les courbes montrant la relation entre le moment de flexion introduit (M) et la rotation relative de l'angle (ψ_{rel}) sont données pour chaque spécimen aux figures 5.12(a-p). Dans ces figures, la rotation relative mesurée dans la zone nodale ($\psi_{rel,n}$) peut être comparée à la rotation relative mesurée aux extrémités ($\psi_{rel,e}$). Cette dernière est logiquement plus grande car elle est influencée par toutes les fissures (comprenant également les fissures dans les deux parties en porte-à-faux du spécimen). La comparaison de ces deux courbes ($M - \psi_{rel,n}$ et $M - \psi_{rel,e}$) permet d'identifier l'endroit où les fissures plus importantes se sont développées. En effet, deux courbes présentant la même allure mettent en avant que les fissures se sont développées principalement dans la zone nodale (zone étudiée des



rayons de pliage: r_1 = 101 mm ; r_2 = 80 mm ; r_3 = 96 mm ; r_4 = 112 mm ; r_5 = 150 mm

Fig. 5.11: Spécimens du deuxième groupe de la série principale d'essais : caractéristiques du détail d'armature dans la zone nodale (position, diamètre et rayons de pliage des barres) et fissuration observée à la rupture

spécimens). Au contraire, un changement d'allure entre les deux courbes (observé pour les spécimens SC35, SC41, SC42, SC43 et SC45, voir figures 5.12(h,l-n,p)) indique que des fissures conséquentes se sont développées à l'extérieur de la zone étudiée. Dans ces cas, il est fort probable que la zone nodale était affectée par un faible endommagement, ce qui indique un bon comportement du spécimen.
L'appréciation des performances de chaque détail d'armature peut ce faire par un ensemble d'indicateurs attestant à la fois la résistance, la capacité de déformation et les caractéristiques de la fissuration dans la zone nodale du spécimen :

– les performances des spécimens en termes de résistance peuvent être quantifiées par le rapport M_{max}/M_{flex} entre le moment maximal introduit dans le spécimen avant la rupture (M_{max}) et la résistance théorique de flexion (M_{flex}) calculée selon l'équation 5.2. Un rapport $M_{max}/M_{flex} \geq 1$ indique que l'écoulement des armatures flexion-

nelles a été atteint, tandis qu'une valeur sensiblement inférieure à 1 indique une faible résistance du spécimen. Les valeurs obtenues sont résumées dans le tableau 5.7.

– Les performances des spécimens en termes de capacité de déformation peuvent être quantifiées par le rapport entre le moment $M_{\Delta 20}$ et le moment $M_{\Delta 0}$. Le moment $M_{\Delta 0}$ indique le point à partir duquel un changement considérable de la rigidité du spécimen est observé (à cause de l'écoulement des armatures ou d'un fort endommagement dû à la localisation des déformations dans la zone nodale). En ce point, la rotation relative $\psi_{rel,e}$ présente une augmentation plus rapide. Sa position est montrée dans les graphiques de la figure 5.12 par une ligne verticale trait-tillée. Il faut noter que, en cas de rupture à caractère fragile, ce point peut ne pas être observé. Dans ces cas, la valeur du moment $M_{\Delta 0}$ est considérée égale à M_{max}.
Le moment $M_{\Delta 20}$ est par contre le moment résidu dans le spécimen suite à un incrément de la rotation relative ($\psi_{rel,e}$) de 20 mRad à partir du point décrit précédemment. Un rapport $M_{\Delta 20}/M_{\Delta 0} \approx 1$ indique donc une grande capacité de déformation, tandis q'une valeur sensiblement inférieure à 1 indique une faible capacité de déformation et une valeur égale à 0 indique une rupture très fragile. Les valeurs obtenues pour chaque spécimen sont résumées dans le tableau 5.7.

– Les performances des spécimens peuvent également être appréciées en analysant les caractéristiques de la fissuration dans la zone nodale. En effet, une fissuration étendue de la zone nodale indique un comportement insatisfaisant du spécimen. Les mesures photogrammétriques effectuées lors des essais [Cam11b] (figure 5.9(a)) peuvent être utilisées pour décrire la fissuration de la zone nodale. En particulier, il est intéressant de connaître et de comparer l'ouverture maximale (w_{max}, donnant l'image de la localisation des fissures) et l'ouverture moyenne (w_{avg}, donnant l'image de l'étendue des fissures dans la zone nodale) des fissures de chaque spécimen. Les valeurs mesurées sont indiquées aux figures 5.10 et 5.11 et dans le tableau 5.7. Ces valeurs ont été enregistrées à un niveau de charge correspondant à $M_{\Delta 0}$. La valeur moyenne de l'ouverture des fissures (w_{avg}) a été calculée en considérant uniquement les triangles du réseaux de photogrammétrie où une fissure a été enregistrée.

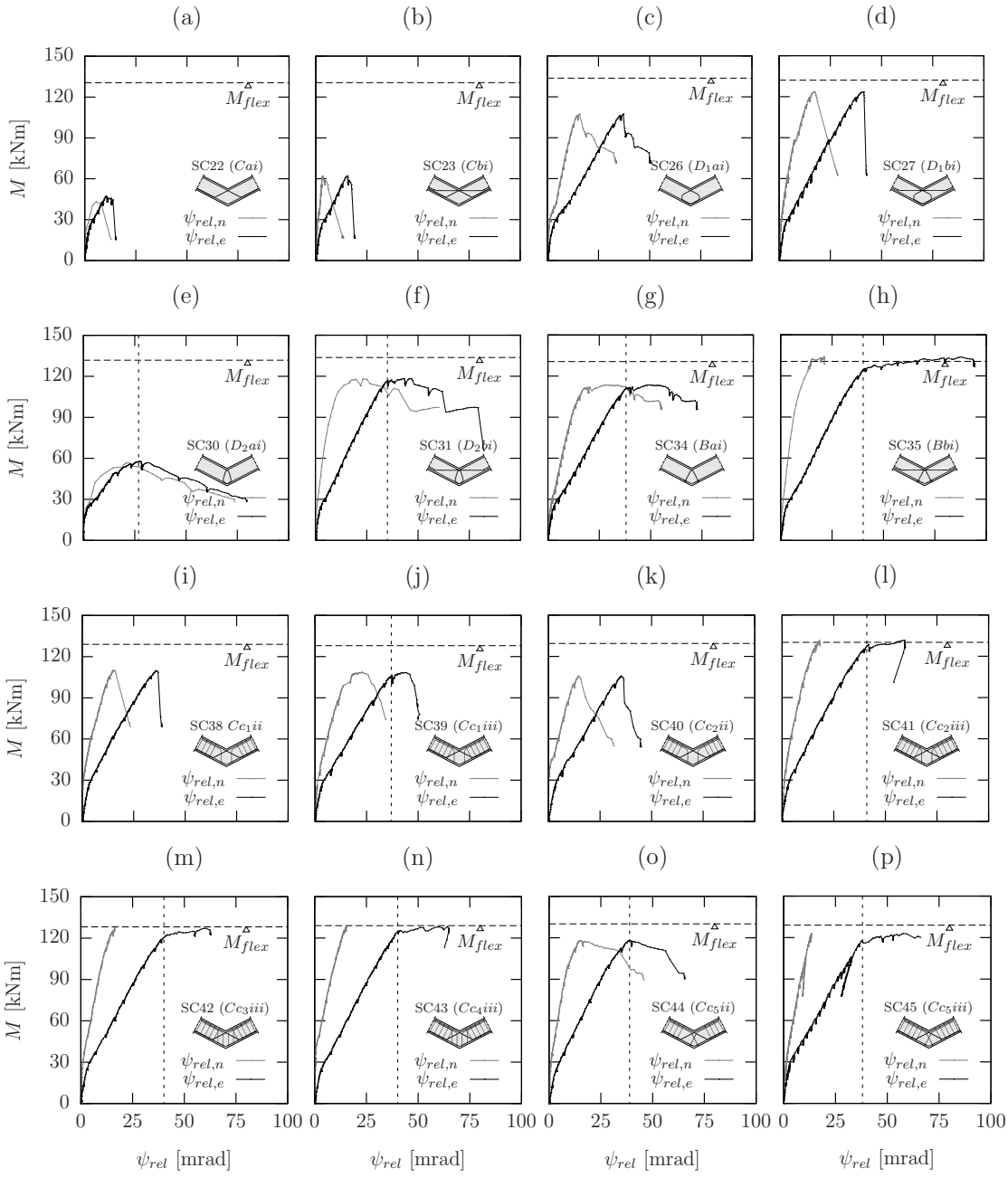


Fig. 5.12: Résultats de la série principale d'essais : **(a-p)** relations mesurées entre le moment de flexion introduit (M) et la rotation relative de l'angle (ψ_{rel})

Tab. 5.7: Résultats de la série principale d'essais : résistances mesurées et valeurs des indicateurs pour l'appréciation des performances

spécimen	détail	ω_{wn} [-]	M_{flex} [kNm]	M_{max} [kNm]	$\frac{M_{max}}{M_{flex}}$ [-]	$\frac{M_{\Delta 20}}{M_{\Delta 0}}$ [-]	w_{max} [mm]	w_{avg} [mm]
SC22	Cai	-	130.5	47.3	0.36	0.00	0.8	0.1
SC23	Cbi	-	130.5	62.2	0.48	0.00	0.7	0.1
SC26	D_1ai	-	133.7	107.6	0.80	0.00	2.9	0.3
SC27	D_1bi	-	132.1	123.6	0.94	0.00	2.5	0.4
SC30	D_2ai	-	131.8	57.8	0.44	0.78	4.3	0.3
SC31	D_2bi	-	133.7	118.6	0.89	0.91	5.0	0.5
SC34	Bai	-	130.6	113.5	0.87	1.01	5.6	0.3
SC35	Bbi	-	130.6	134.0	1.03	1.04	1.5	0.3
SC38	Cc_1ii	0.035	129.0	110.3	0.85	0.00	3.2	0.2
SC39	Cc_1iii	0.047	127.9	108.7	0.85	0.00	3.4	0.4
SC40	Cc_2ii	0.048	129.4	105.9	0.82	0.00	2.8	0.3
SC41	Cc_2iii	0.060	130.1	131.8	1.01	1.03	1.9	0.2
SC42	Cc_3iii	0.063	128.2	127.3	0.99	1.05	2.3	0.2
SC43	Cc_4iii	0.082	129.0	128.7	1.00	1.03	1.8	0.2
SC44	Cc_5ii	0.048	130.1	118.4	0.91	0.86	3.0	0.5
SC45	Cc_5iii	0.061	129.0	123.3	0.96	1.05	1.3	0.2

En analysant les courbes M-ψ_{rel} (figures 5.12(a-p)) et en tenant compte de tous les indicateurs de la performance des spécimens (M_{max}/M_{flex}, $M_{\Delta 20}/M_{\Delta 0}$, w_{max} et w_{avg}, voir tableau 5.7) les considérations suivantes peuvent être faites :

– les géométries alternatives proposées pour l'armature flexionnelle (types B, D_1 et D_2) ont permis d'améliorer les performances des éléments par rapport à la géométrie de référence de type C. Ceci se remarque par la comparaison des spécimens SC22, SC26, SC30 et SC34 montrée à la figure 5.13(a). Cependant, les comportements observés restent insatisfaisants car toutes les ruptures se sont produites avant l'écoulement de l'armature flexionnelle ($M_{max}/M_{flex} < 1$) et avec un grand endommagement de la zone étudiée (se référer aux valeurs de w_{max} et w_{avg}). Les détails types Bai (spécimen SC34) et D_1ai (SC26) ont garanti les meilleures performances, tandis que les détails types Cai (SC22) et D_2ai (SC30) ont montré des performances largement insatisfaisantes ($M_{max}/M_{flex} \ll 1$).

– L'effet d'une armature diagonale dans la zone nodale a été bénéfique en termes de résistance et de capacité de déformation pour toutes les quatre géométries de l'armature flexionnelle (figure 5.13(b)). Ceci a été particulièrement vrai pour les détails types D_1bi (SC27), D_2bi (SC31) et Bbi (SC35). En effet, ces trois spécimens ont montré des résistances très proches (SC27 et SC31) ou égales (SC35) à la résistance plastique (M_{flex}). Cependant, les comportements observés restent insatisfaisants, en particulier car la capacité de déformation observée reste faible ($M_{\Delta 20}/M_{\Delta 0} < 1$, excepté par le spécimen SC35) et car la fissuration observée dans la zone nodale est relativement conséquente. L'incrément d'efficacité observé pour le détail Cbi (spécimen SC23, avec armature diagonale), comparé au détail Cai (SC22, sans armature diagonale), a par

contre été limité et la rupture observée demeure à caractère fragile ($M_{max}/M_{flex} \ll 1$ et $M_{\Delta 20}/M_{\Delta 0} = 0$). Il est intéressant de souligner l'importante augmentation de résistance observée avec le détail D_2bi (spécimen SC31, avec armature diagonale) en comparaison au détail D_2ai (spécimen SC30 sans armature diagonale). Ce dernier est en effet très sensible à la position effective des armatures de flexion. En effet, à cause de la géométrie de la boucle de pliage, un petit défaut de mise en place peut amener à un très mauvais contrôle de la fissure de flexion qui se développe au centre du spécimen (figure 5.10). Par contre, si une armature diagonale est mise en place (D_2bi, SC31), le comportement de ce détail est moins sensible et ce rapproche de celui observé pour le détail type D_1 (spécimens SC26-27, avec des boucles plus amples) et B (SC34-35, avec des armatures bien ancrées).

– En général, l'ajout d'une armature secondaire à l'armature flexionnelle de type C (spécimens SC38-45 en comparaison au spécimen SC22) a permis une grande augmentation des performances du détail. Ceci est montré à la figure 5.13(c) et peut également se voir dans le tableau 5.7. Ces résultats montrent que l'efficacité du détail type C peut être améliorée sensiblement si une armature supplémentaire est disposée dans la zone nodale pour le contrôle de la fissuration et pour permettre une déviation plus efficace des bielles de la zone comprimée.

– Plusieurs solutions ont été investiguées pour la composition de l'armature secondaire [Cam11b] : avec des épingles de nombre et de diamètre variable (type c_1 à c_4, voir figure 5.9(d)), avec des armatures munies de tête d'ancrage (type c_5, voir figure 5.9(d)) et avec un nombre variable de goujons transversaux (type ii à iii, voir figure 5.9(e)). Malgré ce fait, un seul paramètre semble montrer une influence importante sur les performances des spécimens. Il s'agit de la quantité d'armature transversale disposée dans la zone nodale (qui peut être représentée par le taux mécanique d'armature transversale ω_{wn}, voir équation 5.5). En effet, si toutes les armatures secondaires sont suffisamment ancrées (ce qui a été le cas pour les spécimens SC38-45, en particulier car les noeuds TTT [Mut97] on été évités), la quantité totale d'armature transversale se montre plus importante que ses caractéristiques (géométrie et position). Ceci peut être démontré par l'analyse de trois couples de spécimens. Ces trois comparaisons sont mises en avant à la figure 5.14. La première concerne deux spécimens avec un taux d'armature transversale identique ($\omega_{wn} = 0.048$). Il s'agit des spécimens SC39 (détail type Cc_1iii, avec un goujon supplémentaire dans la zone d'ancrage de l'armature flexionnelle) et SC40 (détail type Cc_2ii, sans goujons disposés dans cette position particulière). Comme montré par la figure 5.14(a), les performances des deux spécimens ne montrent pas de différences significatives. Par contre, la comparaison de la figure 5.14(b) entre les spécimens SC40 (Cc_2ii, sans goujon, $\omega_{wn} = 0.048$) et SC41 (Cc_2iii, avec goujon, $\omega_{wn} = 0.06$) montre des différences importantes. En effet, une amélioration conséquente des performances se remarque grâce à l'augmentation du taux d'armature transversale (ω_{wn} de 0.048 à 0.06). Aussi, la comparaison de la figure 5.14(c) entre les spécimens SC44 (Cc_5ii, sans goujon, $\omega_{wn} = 0.048$) et SC45 (Cc_5iii,

avec goujon, $\omega_{wn} = 0.061$) montre la même tendance, en particulier car le spécimen SC45 montre une capacité de déformation supérieure. Ces observations permettent de conclure que les goujons disposés à l'endroit de la zone d'ancrage de l'armature flexionnelle sont plus importants dans le fait qu'ils augmentent le taux d'armature transversale ($\Delta\omega_{wn} \approx 0.012$) que pour le fait de leur position particulière.
La figure 5.15 confirme que la valeur de ω_{wn} est fondamentale pour les performances de la zone nodale en termes de résistance et de capacité de déformation. En effet, la figure 5.15(a) montre un comportement non optimal des spécimens avec un faible taux mécanique d'armature transversale ($\omega_{wn} \leq 0.048$, spécimens SC38-40 et SC44), tandis que la figure 5.15(b) montre un comportement satisfaisant des spécimens avec un taux d'armature plus élevé ($\omega_{wn} \geq 0.06$, spécimens SC41-43 et SC45). Il faut aussi noter que l'augmentation du taux mécanique d'armature transversale au delà de $\omega_{wn} = 0.06$ (SC43, $\omega_{wn} = 0.082$), n'a pas amélioré la réponse de l'élément. Cette augmentation n'est donc pas nécessaire, au moins pour des spécimens similaires a ceux investigués (avec un taux mécanique d'armature flexionnelle $\omega \approx 0.115$).

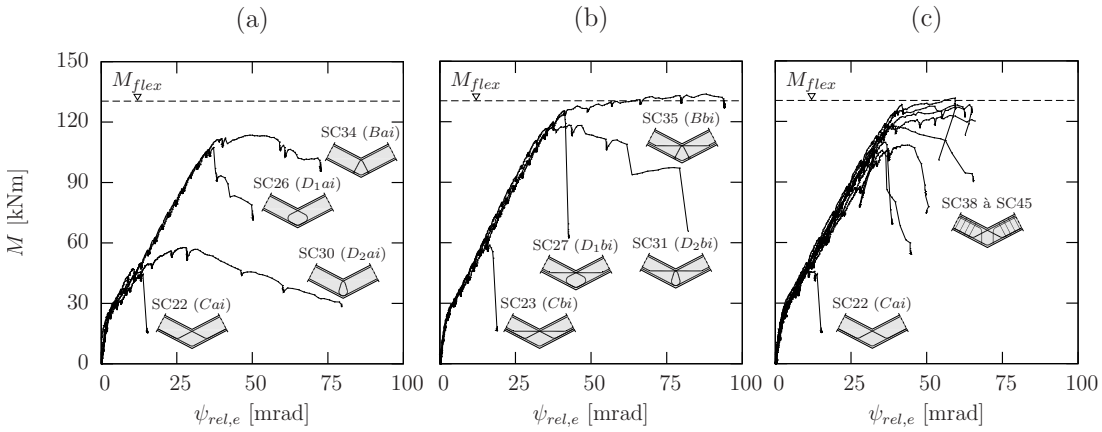


Fig. 5.13: Comparaison des résultats de la série principale d'essais : **(a)** effet du type de détail d'armature flexionnelle (types B, C, D_1 et D_2) ; **(b)** effet de l'armature diagonale (type b) ; et **(c)** effet d'une armature secondaire (types c_1 à c_5, ii et iii) superposée au détail type C

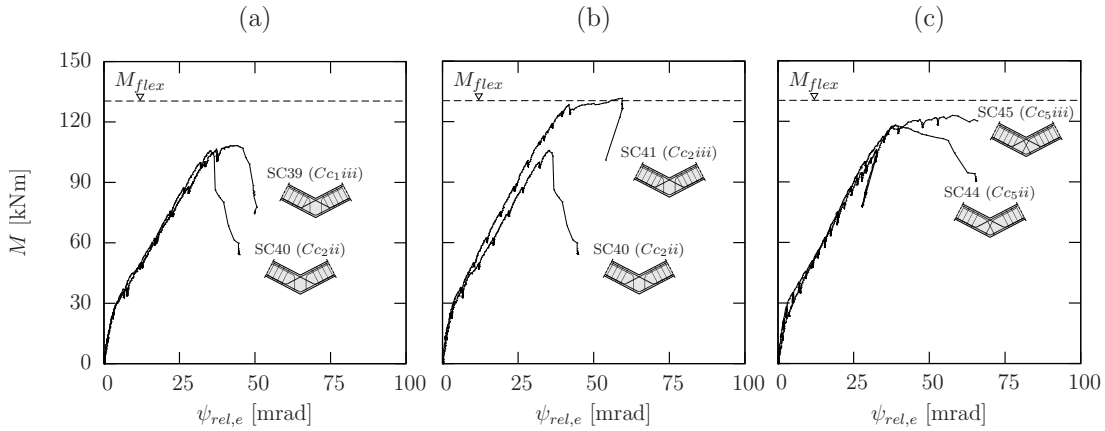


Fig. 5.14: Effet du goujon supplémentaire dans la zone d'ancrage de l'armature flexionnelle : **(a)** spécimens avec un taux mécanique d'armature transversale identique ($\omega_{wn} = 0.048$) ; et **(b-c)** spécimens avec des taux mécaniques d'armature transversale différents ($\omega_{wn} = 0.048$ et $\omega_{wn} = 0.06$)

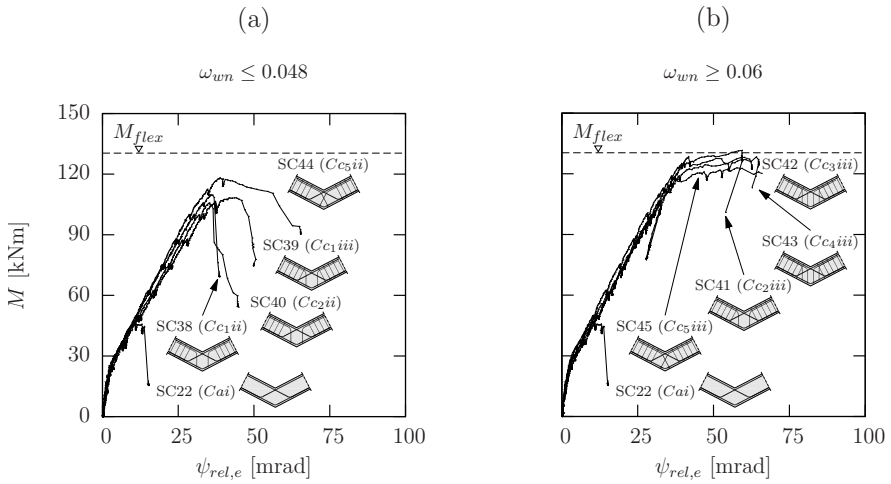


Fig. 5.15: Effet du taux mécanique d'armature transversale : **(a)** spécimens avec $\omega_{wn} \leq 0.048$; et **(b)** spécimens avec $\omega_{wn} \geq 0.06$

5.3 Analyse et dimensionnement des angles basés sur la borne inférieure de la théorie de la plasticité

5.3.1 Analyse des angles avec la méthode des champs de contraintes élastiques-plastiques

L'analyse des régions de discontinuité [Sch87] peut généralement être abordée par la méthode des champs de contraintes ou par la méthode des bielles-et-tirants. Ces deux méthodes se basent sur la borne inférieure de la théorie de la plasticité [Sch87, Leo74, Mut97, Fer07a, Kos09]. En particulier, la méthode des champs de contraintes élastiques-plastiques [Fer07a] (EPSF, voir chapitre 2) permet de déterminer un champ de contraintes

licite, en équilibre statique avec les forces extérieures, tenant compte des propriétés plastiques des matériaux et de l'influence négative de la fissuration sur la résistance à la compression du béton [Vec86, Fer07a, Mut97]. Si les conditions de base pour le développement d'un champ de contrainte sont respectées, en particulier la disposition d'une armature minimale pour le contrôle de la fissuration [Fer07a, Mut97], la méthode des EPSF est généralement un outil pratique et fiable pour l'analyse du comportement d'éléments en béton armé. Sa pertinence pour l'étude du comportement des zones d'angle, soumis à des sollicitations d'ouverture, nécessite toutefois d'être encore validée. Un rappel des principes de la méthode, qui implémente toutes les hypothèses de base de la théorie des champs de contraintes [Sch87, Leo74, Mut97, Fer07a, Kos09], est donné dans la suite (d'avantage de détails peuvent être trouvés dans le chapitre 2) :

– le comportement du béton est modélisé par une loi rigide-parfaitement plastique en compression en négligeant sa résistance à la traction. La résistance plastique à la compression de chaque élément de béton dépend de sa résistance uni-axiale à la compression (f_{cm}) et de la déformation latérale associée (considérée par le coefficient η_ε, voir équation 2.4).

– Le comportement de l'acier en traction et en compression est modélisé par une loi élastique-plastique (avec éventuellement un comportement écrouissant après l'écoulement).

– Une adhérence parfaite est considérée entre l'acier et le béton.

– La direction des contraintes principales est considérée identique à celle des déformations principales. L'engrènement des granulats est donc négligé.

Ce programme de calcul se distingue par le nombre très limité de paramètres requis et pour leur claire signification physique. En effet, les seuls paramètres nécessaires sont la résistance plastique à la compression (f_{cp}) et le module élastique (E_c) du béton ainsi que la limite d'écoulement (f_y) et les modules élastique (E_s) et d'écrouissage (E_{sh}) de l'acier.

Validation de la méthode

Les spécimens testés dans la série préliminaire d'essais (section 5.2.1) ainsi que dans la série principale d'essais (section 5.2.2) ont été analysés avec la méthode des EPSF. Les résultats obtenus sont synthétisés dans le tableau 5.8. La figure 5.16 montre une comparaison entre les modes de rupture observés dans les quatre spécimens de la série préliminaire d'essais et ceux prédits par la méthode des EPSF. Le même type de comparaison est présenté à la figure 5.17 pour une sélection de quatre spécimens de la série principale d'essais.

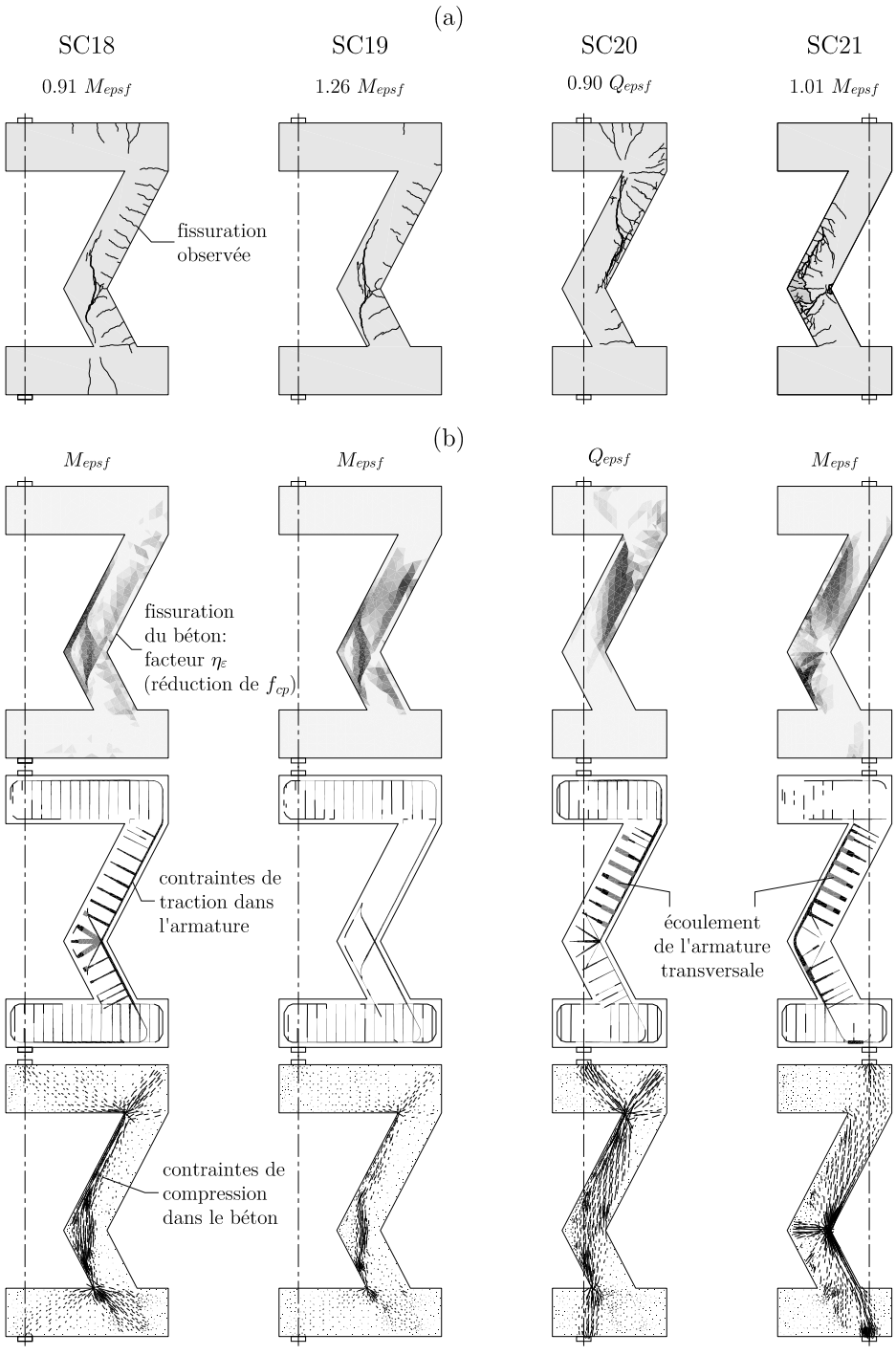


Fig. 5.16: Analyse des spécimens de la série préliminaire d'essais : **(a)** fissuration observée à la rupture des spécimens ; et **(b)** résultats du calcul avec la méthode des EPSF

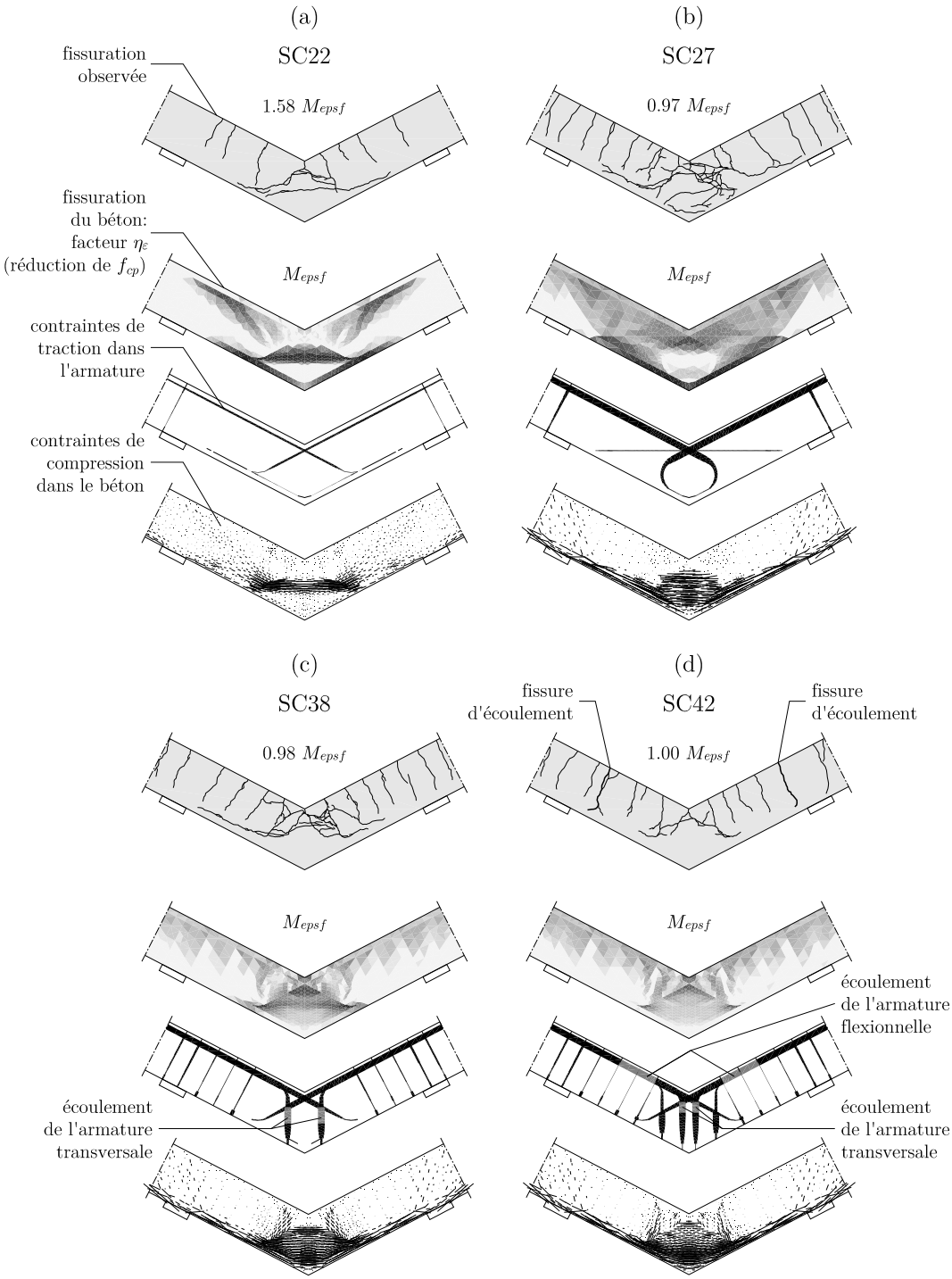


Fig. 5.17: Analyse des spécimens de la série principale d'essais. Comparaison entre la fissuration observée à la rupture des spécimens et les résultats du calcul avec la méthode des EPSF : **(a)** spécimen SC22 ; **(b)** SC27 ; **(c)** SC38 ; et **(d)** SC42

En général, tous les modes de rupture ont été correctement identifiés avec la méthode des EPSF. Les figures 5.16 et 5.17 mettent en avant une parfaite correspondance entre les modes de rupture observés et ceux prédits par cette analyse. Cette similitude est d'autant plus évidente si l'on compare la fissuration observée dans les essais avec les champs de la valeur du coefficient η_ε [Fer07a] (coefficient de réduction de la résistance à la compression du béton en fonction de la fissuration transversale, voir section 2.2.3), qui traduit l'endommagement des éléments à la rupture. Pour ce qui concerne les prévisions des résistances, l'analyse des résultats doit se faire en classant les spécimens en groupes présentant des caractéristiques similaires (tableau 5.8) :

- le spécimen SC18 ne peut en principe pas être analysé avec la méthode des EPSF. En effet, cet essai a été caractérisé par un défaut d'ancrage des goujons disposés dans la zone nodale [Cam11a] (noeud TTT [Mut97]), mais la méthode des EPSF considère une adhérence parfaite entre acier et béton. Ce mode de rupture ne peut donc pas être correctement identifié. Le défaut d'ancrage peut cependant être modélisé à posteriori, suivant les propositions de Fernández et al. [Fer11]. Ceci se fait par l'utilisation d'une limite d'écoulement réduite pour les goujons d'angle, qui considère la géométrie et la position de la fissure critique (fissure diagonale, voir figure 5.16(a)) par rapport à celles des têtes d'ancrage des goujons concernés par le défaut d'ancrage.
- Le résultat de l'analyse faite pour le spécimen SC30 n'a pas beaucoup d'intérêt. En effet, la faible résistance observée pour ce spécimen était tout probablement (l'existence d'un défaut dans l'emplacement de l'armature n'a pas été prouvée après la rupture) due à la sensibilité du détail principal à la position réelle de l'armature (armature de flexion type D_1). La méthode des EPSF ne tient pas compte de cette problématique.
- Pour les spécimens SC19 et SC22-23, avec un détail principal de type C et sans armature transversale dans la zone nodale, la méthode des EPSF n'est en principe pas applicable à cause de l'absence d'une armature minimale pour le contrôle de la fissuration. Dans ces cas, les résultats peuvent donc être sensibles à la taille des éléments finis utilisés pour le calcul. Les résultats de l'analyse de ces spécimens (qui ont montré des mauvaises performances en termes de résistance, moyenne du rapport $M_{max}/M_{flex} = 0.36$) sont conservatifs car leur comportement est fortement influencé par la résistance à la traction du béton, qui est négligée par la méthode des EPSF.
- L'analyse avec la méthode des EPSF devient applicable pour les spécimens SC38-40 et SC44, même qu'ils disposent d'un taux limité d'armature transversale ($\omega_{wn} \leq 0.048$). Ceci est également vrai pour les spécimens SC26-27, SC31 et SC34-35, sans aucune armature transversale mais qui disposent d'une armature de flexion en forme de boucle (offrant un bon confinement de la zone nodale) ou suffisamment ancrée. Tous ces spécimens ont présenté des performances similaires, avec une moyenne du rapport $M_{max}/M_{flex} = 0.89$. L'applicabilité de la méthode des EPSF est aussi garantie pour les spécimen SC20, car une armature minimale était disposée dans la partie externe à sa zone nodale, où une rupture à l'effort tranchant a été observée. Les résultats

de l'analyse de ces six éléments avec la méthode des EPSF sont plutôt satisfaisants, avec une moyenne du rapport M_{max}/M_{epsf} entre la résistance mesurée (M_{max}) et la résistance prédite (M_{epsf}) égale à 0.95 et avec une faible dispersion des résultats (coefficient de variation de 7%).

– Pour les spécimens restant (SC41-43 et SC45), qui disposent d'un taux d'armature transversale suffisant ($\omega_{wn} \geq 0.06$), la méthode des EPSF est applicable sans restrictions. Pour ces éléments qui ont présenté un comportement ductile (moyenne du rapport $M_{max}/M_{flex} = 0.99$), les prédictions de résistance sont très satisfaisantes (moyenne du rapport $M_{max}/M_{epsf} = 1.01$ et coefficient de variation de 2%). Un résultats similaire a été obtenu pour le spécimen soumis à un sollicitation de fermeture de l'angle (SC21).

Tab. 5.8: Résultats de l'analyse des spécimens avec la méthode des EPSF

spécimen	détail	ω_{wn} [-]	M_{flex} [kNm]	M_{max} [kNm]	M_{epsf} [kNm]	$\frac{M_{max}}{M_{flex}}$ [-]	$\frac{M_{max}}{M_{epsf}}$ [-]	moy [-]	CoV [-]
SC18[a]	$(Cciii)$	0.036	144.6	60.6	66.9	0.42	0.91		
SC30[b]	D_2ai	-	131.8	57.8	107.5	0.44	0.54		
SC19	(Cai)	-	145.8	36.9	29.4	0.25	1.26		
SC22	Cai	-	130.5	47.3	30.0	0.36	1.58	1.50	0.14
SC23	Cbi	-	130.5	62.2	37.5	0.48	1.66		
SC20[c]	$(Cciii)$	0.035	145.5	350.0[c]	389.0[c]	-[c]	0.90[c]		
SC38	Cc_1ii	0.035	129.0	110.3	112.5	0.86	0.98		
SC39	Cc_1iii	0.047	127.9	108.7	122.5	0.85	0.89		
SC40	Cc_2ii	0.048	129.4	105.9	125.0	0.82	0.85		
SC44	Cc_5ii	0.048	130.1	118.4	122.5	0.91	0.97	0.95	0.07
SC26	D_1ai	-	133.7	107.6	117.5	0.80	0.92		
SC27	D_1bi	-	132.1	123.6	127.5	0.94	0.97		
SC31	D_2bi	-	133.7	118.6	127.5	0.89	0.93		
SC34	Bai	-	130.6	113.5	107.5	0.87	1.06		
SC35	Bbi	-	130.6	134.0	127.5	1.03	1.05		
SC21	$(Cciii)$	0.033	209.8	216.9	215.0	1.03	1.01		
SC41	Cc_2iii	0.060	130.1	131.8	127.5	1.01	1.03		
SC42	Cc_3iii	0.063	128.2	127.3	127.5	0.99	1.00	1.01	0.01
SC43	Cc_4iii	0.082	129.0	128.7	127.5	1.00	1.01		
SC45	Cc_5iii	0.061	129.0	123.3	125.0	0.96	0.99		

a : défaut d'ancrage des goujons d'angles [Cam11a] (méthode des EPSF pas applicable)
b : sensibilité aux défauts de mise en place de l'armature (méthode des EPSF pas applicable)
c : pas d'excentricité de la charge ($M = 0$), Q_{max} et Q_{epsf} [kN] au lieu de M_{max} et M_{epsf} [kNm], calcul du rapport M_{max}/M_{flex} pas possible

L'analyse effectuée pour les vingt spécimens a confirmé la qualité et la pertinence des résultats obtenus par la méthode des EPSF pour l'étude systématique du comportement des zones nodales soumises à une sollicitation d'ouverture de l'angle. Pour cette raison, en se référant à un détail d'armature principale de type C, il est envisageable d'utiliser cette méthode pour le calcul du taux mécanique minimal d'armature transversale ($\omega_{wn,min}$)

à mettre en place dans la zone nodale :

$$\omega_{wn,min} = \rho_{wn,min}\,\frac{f_{ywn}}{f_{cp}} = \frac{A_{swn,min}}{b\,s_{wn}}\,\frac{f_{ywn}}{f_{cp}} = \frac{A_{swn,min}}{b\,d}\,\frac{f_{ywn}}{f_{cp}}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{5.6}$$

Ce taux minimal est défini comme celui nécessaire à garantir l'écoulement de l'armature flexionnelle avant que toutes autres ruptures interviennent dans la zone nodale. Sa valeur en fonction du taux mécanique d'armature flexionnelle (ω) a été calculé pour les spécimens du deuxième groupe de la série principale d'essais (SC38-45, détail type Cc) et pour d'autres essais disponibles dans la littérature (détail type Cc [Kor76, May72] ou Cd [May72]). La démarche utilisée pour cette étude sera décrite plus loin. Les résultats de cette étude sont montrés aux figures 5.18(a-d). Les courbes de ces graphiques définissent le taux minimal $\omega_{wn,min}$ calculé tandis que les points représentent les résultats des essais. Comme il est visible, tous les essais se trouvant au-dessus des courbes ont montré des ruptures ductiles ($M_{max}/M_{flex} \geq 0.95$) alors que les essais se trouvant au-dessous ont présenté des ruptures prématurées, à caractère plutôt fragile. Ces résultats confirment ultérieurement la pertinence de la méthode des EPSF pour l'analyse systématique de ce type d'éléments.

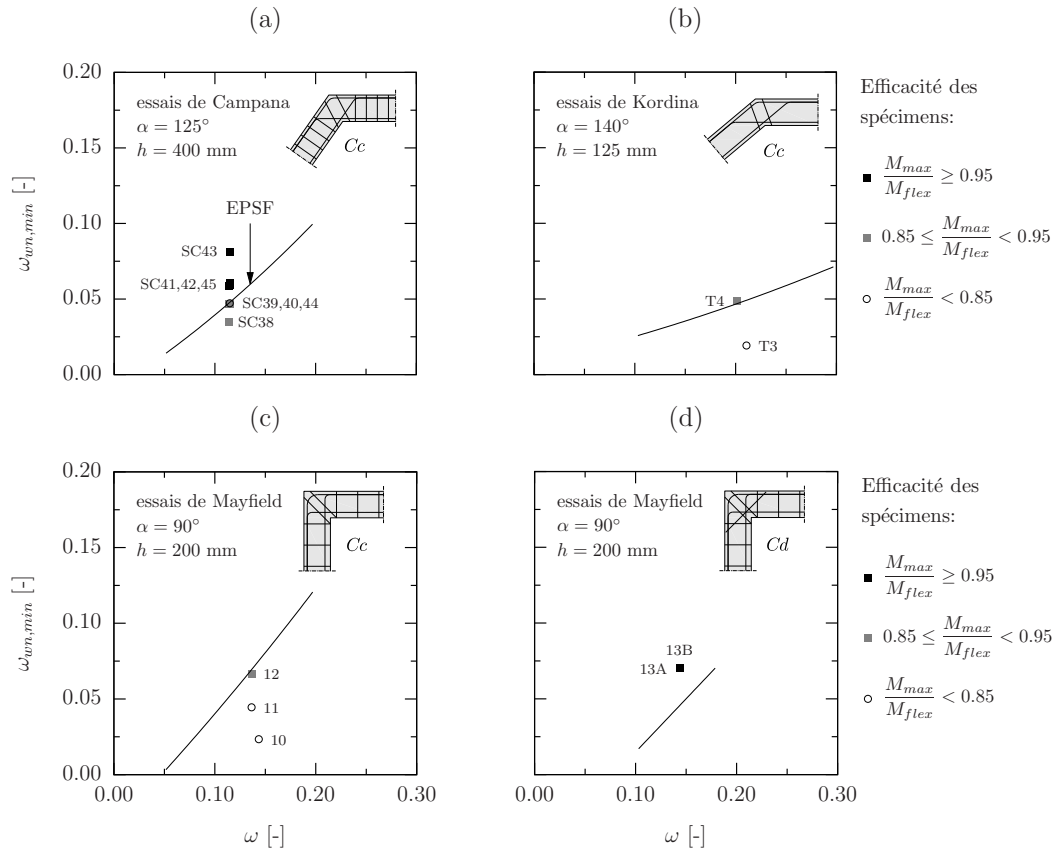


Fig. 5.18: Résultats du calcul du taux mécanique minimal d'armature transversale ($\omega_{wn,min}$) et comparaison avec des essais existants : **(a)** essais de Campana et Muttoni [Cam11b] ; **(b)** essais de Kordina [Kor76] ; et **(c-d)** essais de Mayfield [May72] ; **(d)**

5.3.2 Dimensionnement des angles avec des modèles bielles-et-tirants

La méthode des ESPF est un outil adapté pour l'étude raffinée du comportement des zone nodales. Cependant, son utilisation n'est pas toujours aisée et ne se justifie pas dans des phases préliminaires de conception d'ouvrages. Dans ces cas, il est préférable d'utiliser des modèles des champs de contraintes rigides-plastiques [Mut97, Kos09] ou des modèles bielles-et-tirants [Sch87, Leo74, Mut97]. Ces derniers s'adaptent mieux au degré de détail requis dans ces phases de la conception.
Dans la suite, le comportement réel d'un élément ayant un détail d'armature de type Cc (figure 5.19(a)) est décrit en combinant deux modèles bielles-et-tirants isostatiques :

– le premier modèle, présenté à la figure 5.19(b), ne dispose d'aucune armature transversale. La déviation de la bielle comprimée se fait donc entièrement au niveau des zones d'ancrage de l'armature flexionnelle par le biais de noeuds CCT. Comme démontré par la campagne expérimentale (section 5.2) ainsi que par les essais existants dans la littérature (section 5.1), ce système de déviation des efforts intérieurs conduit à des performances limitées et à des ruptures prématurées à caractère fragile. En particulier, la formation d'une fissure diagonale où les déformations se localisent est observée dans la zone nodale.

– Le deuxième modèle, présenté à la figure 5.19(c), prévoit que toute la déviation de la bielle comprimée se fait à l'intérieur de la zone nodale par le biais d'une armature transversale (noeuds CCT). Ainsi, le tirant transversal de la figure 5.19(c), avec une inclinaison égale à $\alpha/2$, représente la résistance à la traction garantie par la moitié de l'armature transversale (figure 5.19(a)). Si l'ancrage de l'armature transversale est garantit, ce mode de fonctionnement se révèle très efficace, permettant une déviation progressive des bielles de la zone comprimée. De plus, il permet de réaliser cette déviation à l'extérieur de la zone majeurement fissurée, ce qui est préférable.

Les forces internes de la zone tendue (F_s) et de la zone comprimée ($F_c \equiv F_s$) peuvent donc être déviées avec une contribution simultanée du premier ($\xi\ F_s$) et du deuxième ($(1-\xi)\ F_s$) modèle (voir respectivement les figures 5.19(b) et 5.19(c)). Le comportement réel de l'élément est donc représenté par le modèle bielles-et-tirants hyperstatique de la figure 5.19(d). Basée sur un modèle bielles-et-tirants, le but de l'étude est, tout comme celle effectuée dans la section 5.3.1 pour le calcul du taux mécanique minimal d'armature transversale ($\omega_{wn,min}$), d'éviter des ruptures prématurées au niveau de la zone nodale se produisant avant l'écoulement de l'armature flexionnelle. Pour cette raison, l'intensité maximale de la force de compression à dévier peut être décrite par :

$$F_c \equiv F_s = A_s\ f_y = \omega\ f_{cp}\ b\ d \tag{5.7}$$

Si l'on considère les conditions d'équilibre exprimées aux équations 5.8 et 5.9 et établies sur la base du modèle bielles-et-tirants de la figure 5.19(c), la force sollicitant chaque tirant transversal de la zone nodale (F_{wn}) peut être calculée selon l'équation 5.10.

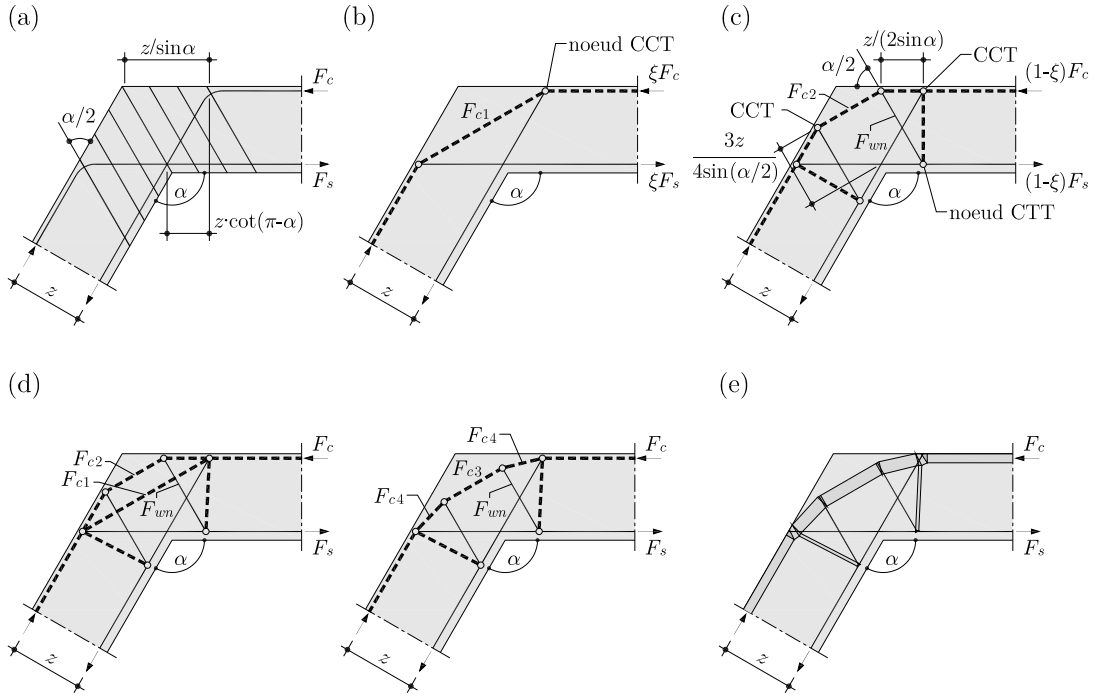


Fig. 5.19: Modèle bielles-et-tirants pour le dimensionnement d'angles soumis à une sollicitation d'ouverture et avec un détail d'armature de type Cc : **(a)** caractéristiques du détail d'armature étudié ; **(b)** modèle bielles-et-tirants sans armatures transversales ; **(c)** modèle bielles-et-tirants avec armatures transversales ; **(d)** superposition des deux modèles considérés (modèle hyperstatique) ; et **(e)** champ de contraintes rigide-plastique correspondant

$$z\ (1-\xi)\ F_c = \frac{3\,z}{4\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\ F_{c2} \tag{5.8}$$

$$F_{wn} = \frac{F_{c2}}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \tag{5.9}$$

$$F_{wn} = (1-\xi)\,\frac{4}{3}\,\omega\ f_{cp}\ b\ d\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{5.10}$$

La force maximale qui peut être introduite dans chaque tirant transversal de la zone nodale peut également être exprimée en fonction de sa surface d'armature minimale ($A_{swn,min}/2$) et donc du taux mécanique minimal d'armature transversale ($\omega_{wn,min}$) :

$$F_{wn} = \frac{A_{swn,min}}{2}\ f_{ywn} = \frac{\omega_{wn,min}\ b\ s_{wn}\ f_{cp}}{2\ f_{ywn}}\ f_{ywn} = \frac{\omega_{wn,min}\ b\ d\ f_{cp}}{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \tag{5.11}$$

En regroupant les équations 5.10 et 5.11, on parvient à mettre en évidence que le taux mécanique minimal d'armature transversale de la zone nodale ($\omega_{wn,min}$) peut être exprimé en fonction du taux mécanique d'armature flexionnelle (ω) et de l'amplitude de

l'angle α :

$$\omega_{wn,min} = (1 - \xi)\,\frac{8}{3}\,\omega\,\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{5.12}$$

Dans cette équation, le coefficient ξ définit la part de force qui est déviée par l'action du premier modèle bielles-et-tirants ($\xi\ F_c$, voir figure 5.19(b)). La part de force déviée par le deuxième modèle (figure 5.19(c)) est donc logiquement définie par $(1 - \xi)$. La valeur de ce coefficient ($0 \leq \xi \leq 1$) dépend de plusieurs paramètres. En particulier, elle sera influencée par les conditions d'ancrage de l'armature flexionnelle et de l'armature transversale ainsi que par l'état de fissuration de la zone nodale. Pour des petites valeurs des forces d'ancrage (taux d'armature flexionnelle modérés) ainsi que pour des faibles fissurations de la zone nodale, le premier modèle bielles-et-tirants (figure 5.19(b)) risque d'être prépondérant et l'armature transversale nécessaire sera donc très faible. Au contraire, pour des forces d'ancrage plus importantes ou en cas de plus grands endommagements de la zone nodale, la déviation sera faite en grande partie par l'action de l'armature transversale du deuxième modèle (figure 5.19(c)). En accord avec les résultats des analyses effectuées avec la méthode des EPSF, le degré de fissuration de la zone nodale est principalement influencé par :

– l'amplitude de l'angle α, influençant la distance entre la bielle de compression inclinée et le noeud interne de l'angle (lieu de développement de la première fissure de flexion), l'amplitude des angles relatifs entre bielles et tirants et l'amplitude de la déviation exigée par les bielles de la zone comprimée (figure 5.6(b)).

– La valeur du taux mécanique d'armature flexionnelle (ω) qui influence l'intensité de la force totale à dévier dans la zone nodale pour l'atteinte de l'écoulement des armatures (équation 5.7).

En accord avec la philosophie [Mut12a, Mut12b] décrite par le Model Code 2010 [Fib11] pour la conception des ouvrages, une approche basée sur différents niveaux d'approximation doit être mise en place pour l'appréciation de la valeur du coefficient ξ. Pour des vérifications préliminaires (dimensionnements simples et sécuritaires, niveau d'approximation I), une valeur $\xi = 0$ peut être utilisée. Ce choix conduit à un dimensionnement prudent de l'armature transversale car toute la déviation des efforts doit se faire par l'activation de cette dernière. Pour des niveaux d'approximation supérieurs, le calcul de la valeur du coefficient ξ peut être effectué par une analyse avec la méthode des EPSF.

Etude paramétrique avec la méthode des EPSF

Dans le but de permettre des analyses avec un degré d'approximation supérieur, une étude paramétrique portant sur l'amplitude α de l'angle ainsi que sur le taux mécanique d'armature flexionnelle (ω) a été effectuée avec la méthode des EPSF. Une plage d'amplitudes de l'angle α comprises entre 90° et 140° et des valeurs du taux mécanique d'armature flexionnelle (ω) jusqu'à 0.3 ont été considérées. Dans le même sens que ce qui a été fait pour la détermination des courbes $\omega_{wn,min} - \omega$ de la figure 5.18, l'étude

a été effectuée pour l'identification du taux mécanique minimal d'armature transversale ($\omega_{wn,min}$) nécessaire à garantir l'écoulement de l'armature flexionnelle avant toutes autres ruptures dans la zone nodale. Cette situation correspond à un type de rupture pour lequel la valeur du rapport M_{max}/M_{flex} (voir section 5.2.2), indiquant l'efficacité des éléments en termes de résistance, est égale ou supérieure à 1. Pour ce type de rupture, la pertinence de la méthode des EPSF a déjà été démontrée (voir section 5.3.1, tableau 5.8) et les résultats de cette étude paramétrique pourrons donc être utilisés sans restrictions.
Les caractéristiques de l'élément utilisé pour ce travail sont présentées à la figure 5.20. L'étude a été effectuée en variant l'amplitude de l'angle α et la surface d'armature flexionnelle A_s (et donc la valeur du taux mécanique d'armature flexionnelle ω). Par contre, la valeur de tous les autres paramètres a été gardée constante. Il s'agit des limites d'écoulement des armatures (f_y, f_{yw} et f_{ywn}), de la résistance à la compression du béton (f_{cp}), des propriétés géométriques de la section (b et d) et du taux d'armature transversale dans les régions à l'extérieure de la zone nodale (ρ_w). En principe, les valeurs utilisées pour ces paramètres n'ont pas beaucoup d'importance. En effet, tous ces paramètres interviennent dans le calcul des taux mécaniques d'armature (ω et ω_{wn}, adimensionalisation). Il faut aussi souligner que la valeur du taux d'armature transversale dans les régions à l'extérieure de la zone nodale (ρ_w) n'a pratiquement eu aucune influence sur les résultats obtenus dans cette étude paramétrique. Ceci à également été observé dans les résultats de la série principale d'essais (voir section 5.2.2).

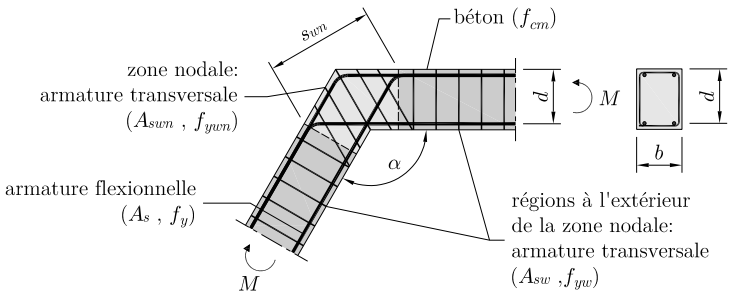


Fig. 5.20: Etude paramétrique effectuée avec la méthode des EPSF : caractéristiques de l'élément étudié

Pour chaque couple $\alpha - \omega$, le taux d'armature transversale dans la zone nodale (ω_{wn}) a été augmenté au fur et à mesure jusqu'à la quantité permettant d'atteindre l'écoulement de l'armature flexionnelle. Ceci a été fait en variant la surface d'armature A_{swn}. Il faut souligner que l'armature transversale a été disposée de façon repartie dans la zone nodale (figure 5.20). Cette condition est importante pour éviter que la taille des éléments finis puisse affecter les résultats du calcul. De cette façon, une bonne stabilité a pu être observée lors du calcul numérique. Les résultats obtenus avec cette analyse sont résumés aux figures 5.21(a-b) (courbes trait-tillées) qui montrent respectivement les relations $\omega_{wn,min} - \omega$ (pour différentes valeurs de α) et $\omega_{wn,min} - \alpha$ (pour différentes valeurs de ω). Sur la base de l'équation 5.12, la valeur du coefficient ξ obtenue pour les différents

couples $\alpha - \omega$ peut ainsi être dérivée :

$$\xi = 1 - \frac{3}{8} \frac{\omega_{wn,min}}{\omega \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \tag{5.13}$$

L'allure des courbes $\xi - \omega$ obtenues pour chaque amplitude de l'angle α est montrée à la figure 5.21(c) (courbes trait-tillées). Dans cette figure, l'effet des deux paramètres étudiés (α et ω) peut ce voir facilement. Le taux mécanique d'armature flexionnelle (ω) influence assez sensiblement la valeur du coefficient ξ. Comme il était attendu, pour des valeurs modérées de ω, la valeur de ξ est proche de 1. Ceci signifie que la plus grande partie de déviation des efforts intérieurs peut se faire, au niveau de la zone d'ancrage de l'armature flexionnelle, selon le modèle bielles-et-tirants de la figure 5.19(b) et que la quantité d'armature transversale nécessaire est très faible, voir nulle (si $\xi = 1$). Il faut souligner que des valeurs modérées de ω ne s'obtiennent pas uniquement en réduisant la surface d'armature flexionnelle, mais également en variant les propriétés mécaniques des matériaux. En particulier, l'utilisation d'un béton de meilleure qualité (augmentation de f_{cp} et donc diminution de ω, voir équation 5.1) permettrait l'amélioration des performances du modèle bielles-et-tirants de la figure 5.19(b). Par contre, en cas d'augmentation de la valeur de ω, la disposition d'une armature transversale devient indispensable ($\xi \ll 1$, voir figure 5.21(c)) et le fonctionnement selon le modèle bielles-et-tirants de la figure 5.19(c) est donc déterminant.

Une influence non négligeable de l'amplitude de l'angle α peut également être observée aux figures 5.21(a-c), en particulier pour des taux mécaniques d'armature flexionnelle importants. En effet, la valeur du coefficient ξ est plus élevée pour des petites amplitudes de α, ce qui signifie que le modèle bielles-et-tirants de la figure 5.19(b) est plus efficace dans ces cas. Comme déjà discuté précédemment (voir section 5.1.2, figure 5.6(b)), pour des petites amplitudes de α, la bielle inclinée de la zone nodale se développe à un endroit moins propice à la présence des fissures et l'amplitude des angles relatifs entre bielles et tirants augmente, rendant moins problématique le fonctionnement des noeuds.

Pour achever l'étude paramétrique, une formule analytique pour le calcul de la valeur du coefficient ξ est proposée :

$$\xi = \lambda_1 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\lambda_2}{\omega} \leq 1.0 \tag{5.14}$$

où $\lambda_1 = 0.4$ et $\lambda_2 = 0.02$ sont les constantes qui permettent la meilleure correspondance avec les résultats obtenus par la méthode des EPSF. Les courbes $\xi - \omega$, obtenues sur la base de l'équation 5.14 (courbes continues), sont comparées à celles obtenues avec la méthode des EPSF (courbes trait-tillées) à la figure 5.21(c). La même comparaison est faite, aux figures 5.21(a-b), respectivement pour les courbes $\omega_{wn,min} - \omega$ et $\omega_{wn,min} - \alpha$, obtenues en injectant l'équation 5.14 dans l'équation 5.12. Comme mis en avant dans ces figures, les résultats de l'étude paramétrique sont fidèlement représentés par l'utilisation de l'équation 5.14. Cette équation permet le dimensionnement des armatures sur la base d'un modèle bielle et tirants (figures 5.19(b-d)). Dés lors les efforts dans les éléments

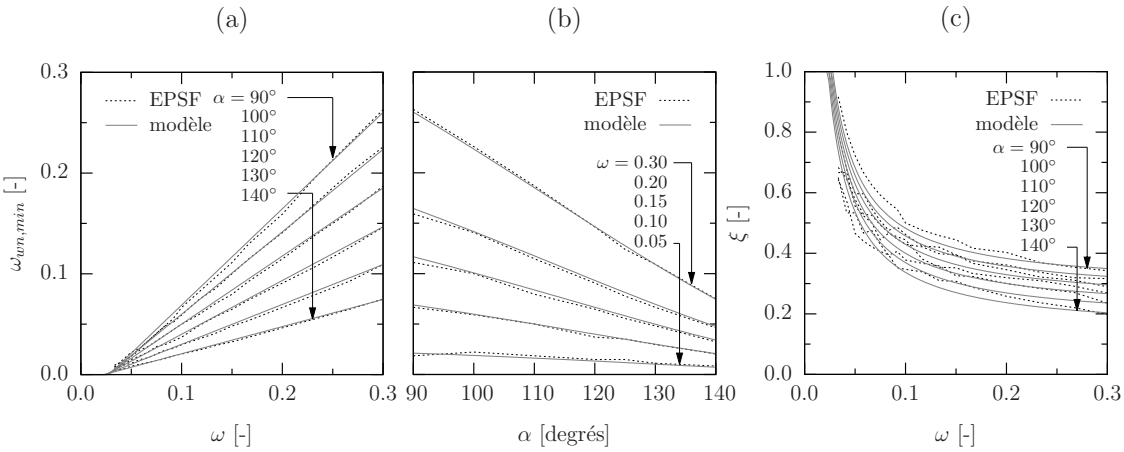


Fig. 5.21: Comparaison entre les résultats de l'étude paramétrique effectué avec la méthode des EPSF (courbes trait-tillées) et le modèle d'approximation proposé (courbes continues) : **(a)** taux mécanique minimal d'armature transversale en fonction du taux mécanique d'armature flexionnelle ; **(b)** taux mécanique minimal d'armature transversale en fonction de l'amplitude de l'angle α ; et **(c)** valeur du coefficient ξ en fonction du taux mécanique d'armature flexionnelle

calculés, toutes les vérifications finales, comme par exemple le contrôle de l'épaisseur des bielles et des détails d'ancrage, peuvent être effectuées avec un champ de contraintes rigide-plastique, comme montré à la figure 5.19(e). Il faut toutefois souligner que cette équation a été déterminée pour des valeurs de α comprises entre 90° et 140° et ne peut donc pas être utilisée pour des valeurs en dehors de cette plage. L'utilisation de l'équation 5.14 pour des valeurs de $\omega > 0.3$ (à l'extérieur de la plage de valeurs étudiées) perd également son intérêt car la quantité d'armature transversale nécessaire deviennent beaucoup trop importante et n'est plus raisonnable.

5.4 Conclusions

Dans ce chapitre, le comportement d'angles de cadre soumis à une sollicitations statique de fermeture ou d'ouverture a été étudié. Suite à ce travail, les conclusions suivantes peuvent être faites :

1. Le comportement des zones nodales est fortement influencé par le type de sollicitation. L'efficacité d'angles soumis à une sollicitation de fermeture est généralement satisfaisante. Par contre, le comportement d'angles soumis à une sollicitation d'ouverture peut se révéler problématique, avec un risque élevé de ruptures prématurées à caractère fragile.

2. Le comportement des angles soumis à une sollicitation d'ouverture est fortement influencé par le type de détail d'armature (armature flexionnelle et armature secondaire) disposé dans la zone nodale.

3. La géométrie de l'armature flexionnelle joue un rôle particulièrement important. Les meilleurs résultats sont généralement obtenus avec des armatures en forme de boucle permettant un bon confinement du béton dans la zone nodale. Au contraire, le comportement d'un détail prévoyant des armatures pliées avec ancrage dans la zone comprimée est généralement très insatisfaisant.

4. L'efficacité des éléments, en termes de résistance et de capacité de déformations, peut être sensiblement améliorée en disposant une armature transversale dans la zone nodale. Cette dernière permet d'obtenir un meilleur contrôle de la fissuration et une déviation plus efficace des bielles de la zone comprimée.

5. Une campagne expérimentale a été effectuée sur d'éléments obtus soumis à une sollicitation d'ouverture. Une attention particulière a été dédiée au cas d'éléments munis d'une armature flexionnelle avec ancrage dans la zone comprimée et d'une armature transversale dans la zone nodale. Des solutions performantes, permettant l'atteinte d'un comportement ductile, ont été identifiées. La nécessité d'un taux minimal d'armature transversale dans la zone nodale a été mise en évidence.

6. L'étude du comportement des régions nodales peut être effectuée avec des méthodes basées sur la borne inférieure de la théorie de la plasticité. La méthode des champs de contraintes élastiques-plastiques (EPSF) s'est montrée un outil pratique et fiable pour l'analyse du comportement de ces éléments, également en cas de sollicitations d'ouverture des angles. En effet, les modes de rupture sont capturés avec une précision très satisfaisante et, si les conditions de base pour l'utilisation de cette méthode sont respectées (mise en place d'une armature minimale de contrôle de la fissuration), d'excellentes prédictions de la résistance des éléments sont également possibles.

7. Le dimensionnement des armatures dans la zone nodale peut être effectué avec des modèles bielles-et-tirants, permettant une étude rapide et prudente du comportement des éléments. Pour faciliter l'étude des zones nodales avec de tels modèles, une étude paramétrique a été effectuée avec la méthode des EPSF. Des lignes directrices pour l'établissement d'un modèle bielles-et-tirants ont été mises en avant lors de cette étude.

Chapitre 6

Conclusions et propositions pour des travaux futurs

6.1 Conclusions

Des conclusions détaillées ont déjà été mises en avant dans chaque chapitre de cette thèse. De manière plus générale, et sur la base des différentes études présentées dans cette thèse, les conclusions suivantes peuvent être tirées :

1. La théorie de la fissure critique et la méthode des champs de contraintes se révèlent des outils adaptés pour l'étude du comportement d'éléments en béton armé sans armature transversale face aux sollicitations d'effort tranchant. En particulier, l'utilisation de ces méthodes doit être faite en tenant compte de l'élancement des éléments analysés. Pour des poutres droites avec un élancement réduit, la méthode des champs de contraintes élastiques-plastiques (EPSF) permet d'obtenir des résultats pertinents (conservatives en règle générale en raison du fait que l'engrènement des granulats est négligé par cette méthode). Pour des éléments avec un élancement plus conséquent, la théorie de la fissure critique permet d'identifier correctement le comportement des éléments, en prenant en compte correctement l'effet des différents paramètres qui influencent leur résistance, à savoir : la taille des éléments, le taux d'armature flexionnelle, la taille des granulats, la résistance du béton. La présence d'un effort normal sollicitant la section des éléments analysés doit également être considérée car elle peut influencer sensiblement leur comportement, en faisant notamment varier leur élancement.

2. Pour le cas de la géométrie des poutres droites investiguées dans le cadre de cette thèse, l'engrènement des granulats, l'armature transversale ainsi que l'effet goujon de l'armature flexionnelle se révèlent être les principaux modes de transmissions de l'effort tranchant. Le travail de quantification effectué a toutefois mis en avant une grande variabilité de leur importance relative, qui est principalement influencée par les caractéristiques de la fissure critique, notamment sa forme et sa cinéma-

tique. Comme il a été mis en avant dans la campagne expérimentale, ces dernières peuvent varier de manière conséquente d'un élément à l'autre. Cette variabilité ne se remarque cependant pas sur la résistance finale des éléments, car les contributions des différents modes de transmission de l'effort tranchant se compensent. Les mesures effectuées pour le suivi de la cinématique des fissures se sont révélées très adaptées pour l'étude du comportement des éléments. Il en est de même pour les modèles physiques utilisés pour la quantification de la contribution de chaque mode de transmission de l'effort tranchant, lesquels ont permis d'obtenir des résultats pertinants.

3. Le comportement d'éléments courbes en béton armé sans armature transversale est influencé de manière non-négligeable par les forces de déviation distribuées qui se développent à cause de la courbure de leurs armatures flexionnelles et de leurs membrures comprimées. Les résistances des éléments peuvent être augmentées ou diminuées selon le type de courbure des éléments, car des contraintes radiales de compression et de traction peuvent apparaître en raison de cette dernière. Pour autant que la présence des forces de déviation distribuées soit considérée, la théorie de la fissure critique se révèle un outil adapté pour l'étude du comportement des éléments courbes, sans armature transversale et ayant un élancement permettant de provoquer des ruptures caractérisées par le développement instable de la fissure critique. Dans certaines conditions (courbure des éléments, taux d'armature flexionnelle, rapport moment / effort tranchant), une interaction semble pouvoir avoir lieu entre les ruptures d'effort tranchant et celles par éclatement du béton d'enrobage. Cette zone d'interaction nécessite cependant d'être ultérieurement investiguée.

4. Le comportement d'angles de cadre soumis à des sollicitations d'ouverture, dans lesquels les forces de déviation se concentrent dans la zone nodale, peut être amélioré de façon consistante par la mise en place d'une armature transversale. Pour autant qu'un taux d'armature transversale suffisant soit mis en place, le comportement de ces éléments peut se caractériser par l'atteinte de la résistance plastique, avec une capacité de déformation conséquente. Dans ces conditions, le comportement des angles de cadre devient adapté pour le cas de sollicitations cycliques d'ouverture et de fermeture, ce qui représente un intérêt particulier en termes de comportement des structures face aux séismes. Ces types d'éléments, qui développent des forces de déviation concentrées, se prêtent particulièrement pour être étudiés avec des modèles bielles-et-tirants ou avec la méthode des champs de contraintes. Si une armature minimale pour le contrôle de la fissuration est mise en place, leur comportement peut être analysé de façon consistante par la méthode des champs de contraintes élastiques-plastiques (EPSF).

6.2 Travaux futurs

Les sujets suivants nécessitent des efforts de recherche supplémentaires à l'avenir :

1. Comme il a été démontré, l'étude des éléments dont l'élancement réduit les placent sur le flanc gauche de la vallée de Kani (ruptures à l'effort tranchant déclenchées par le défaut de résistance de la bielle d'appui direct qui est pénétrée par les fissures), peut se faire par la méthode des EPSF. Ce travail se montre toutefois laborieux et donne lieu à des résultats plutôt conservatifs, en raison du fait que l'engrènement des granulats est négligé par cette méthode. L'incorporation de nouveaux paramètres pour sa prise en compte dans la méthode des EPSF pourrait se révéler intéressante. Toutefois, ceci risquerait de compliquer de manière démesurée les hypothèses de bases de la méthode, dont la simplicité représente l'un de ses points clefs jusqu'à présent, mais permettrait d'élargir le domaine d'application de cette approche.

2. Sur la base des résultats du travail de quantification de la contribution des modes de transmission de l'effort tranchant (MTET), il pourrait être intéressant de développer un modèle permettant de calculer la résistance des éléments en tenant compte de la contribution des principaux MTET, en fonction de la forme et de la cinématique d'une fissure critique idéalisée. Un travail de ce type ferait sens autant pour le cas d'éléments avec peu d'armature transversale que pour celui d'éléments sans une telle armature. Pour cette raison, il faudra principalement se concentrer sur le développement d'un système de mesure adapté pour le suivi de la cinématique des fissures dans les éléments sans armature transversale. En effet, le développement des fissures dans ces éléments se fait de façon trop instable en relation au système de mesures manuelles qui a été utilisé dans le cadre de cette thèse. L'utilisation d'un système de photogrammétrie est prometteuse, comme il a été mis en évidence dans le cas des essais effectués sur les angles de cadre [Cam11b]. De plus, un travail de quantification des MTET sera également intéressant également pour des éléments soumis à d'autres conditions de charge, notamment à des charges réparties, afin de mettre en évidence d'éventuelles différences dans la réponse des éléments.

3. Pour ce qui concerne les éléments courbes, il faudra investiguer de manière détaillée la zone d'interaction entre les ruptures par effort tranchant et celles par éclatement du béton d'enrobage. Des nouvelles campagnes expérimentales sont indispensables pour la compréhension des modes de rupture dans cette zone d'interaction. Ce travail devra être effectué en relation avec la campagne d'essais présentée dans le cadre de cette thèse [Cam12] ainsi qu'à celle effectuée par Fernández et al. [Fer10] sur des arcs similaires soumis à la flexion pure. Pour ce faire, il faudra varier soit la courbure des éléments soit le rapport entre le moment de flexion et l'effort tranchant (en changeant les conditions d'appui des éléments), de façon à accentuer l'intensité des forces de déviation vis-à-vis de celle de l'effort tranchant. L'effet

d'efforts de compression ou de traction dans les éléments courbes mérite également d'être étudié dans la suite. En effet, les éléments courbes qui se concernent plusieurs types d'ouvrage, sont généralement soumis à des sollicitations combinées de flexion, effort tranchant et efforts normaux.

4. La recherche effectuée sur le comportement des angles de cadre soumis à des sollicitations d'ouverture, pourrait être suivie par l'analyse de leur performance pour des chargements cycliques d'ouverture et de fermeture (sollicitations sismiques). L'introduction d'une sollicitation d'effort tranchant supplémentaire, qui modifie l'intensité et les caractéristiques de la force à dévier dans la zone nodale, peut également être un thème méritant un intérêt futur.

Bibliographie

[Abd89] **Abdul-Wahab H. M. S., Ali W. M.**, *Strength and behavior of reinforced concrete obtuse corners under opening bending moments*, ACI Structural Journal, Vol. 86, No. 6, pp. 679-685, Detroit, États-Unis, Novembre-Décembre, 1989.

[Abd98] **Abdul-Wahab H. M. S., Al-Roubai A. A. M.**, *Strength and behaviour of steel fibre reinforced concrete corners under opening bending moment*, Magazine of Concrete Research, Vol. 50, No. 4, pp. 305-318, Londres, Royaume-Uni, Décembre, 1998.

[Abd99] **Abdul-Wahab H. M. S., Salman S. A. R.**, *Effect of corner angle on efficiency of reinforced concrete joints under opening bending moment*, ACI Structural Journal, Vol. 96, No. 1, pp. 115-121, Farmington Hills, États-Unis, Janvier-Février, 1999.

[Aci08] **ACI**, *Building code requirements for structural concrete*, ACI 318-08, American Concrete Institute, ACI Committee 318, 467 p., Detroit, États-Unis, 2008.

[Akk00] **Akkermann J.**, *Rotationsverhalten von Stahlbeton-Rahmenecken*, Thèse de doctorat, Karlsruhe Institute of Technology, 346 p., Karlsruhe, Allemagne, 2000.

[Ana09] **Anastasi A., Muttoni A., Fernández Ruiz M., Campana S.**, *Essais d'effort tranchant sur poutres en béton armé sans ou avec une faible armature transversale*, Projet de Master, Rapport d'essais, EPFL, IBETON, Laboratoire de construction en béton, Lausanne, Suisse, Juillet, 2009.

[Ang99] **Angelakos B.**, *The behavior of reinforced concrete knee joints under earthquake loads*, Thèse de doctorat, Department of Civil Engineering, University of Toronto, 316 p., Toronto, Canada, 1999.

[Bal72] **Balint P. S., Taylor H. P. J.**, *Reinforcement detailing of frame corner joints with particular reference to opening corners*, Cement and Concrete Association, 16 pp., Londres, Royaume-Uni, 1972.

[Baz05a] **Bažant Z. P., Yu Q.**, *Designing against size effect on shear strength of reinforced concrete beams without stirrups - I : Formulation*, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 131, No. 12, pp. 1877-1885, Reston, États-Unis, Décembre, 2005.

[Baz05b] **Bažant Z. P., Yu Q.**, *Designing against size effect on shear strength of reinforced concrete beams without stirrups - II : Verification and calibration*, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 131, No. 12, pp. 1886-1897, Reston, États-Unis, Décembre, 2005.

[Baz09] **Bažant Z. P., Yu Q.**, *Does strength test satisfying code requirement for nominal strength justify ignoring size effect in shear ?*, ACI Structural Journal, Vol. 106, No. 1, pp. 14-19, Farmington Hills, États-Unis, Janvier-Février, 2009.

[Baz91] **Bažant Z. P., Kazemi T.**, *Size effect on diagonal shear failure of beams without stirrups*, ACI Structural Journal, Vol. 89, No. 3, pp. 268-276, Detroit, États-Unis, Mai-Juin, 1991.

[Cam10] **Campana S., Muttoni A.**, *Analysis and design of an innovative solution for tunnels using elastic-plastic stress fields*, Proceeding of the 8th fib-PhD Symposium, pp. 75-80, Copenhague, Danemark, 2010.

[Cam11a] **Campana S., Muttoni A.**, *Essais sur angles de cadre d'une tranchée couverte à section polygonale (série préliminaire)*, Rapport d'essai 08-03-RE01, EPFL, IBETON, Laboratoire de construction en béton, 67 pp., Lausanne, Suisse, Novembre, 2011.

[Cam11b] **Campana S., Muttoni A.**, *Essais d'ouverture d'angles de cadre d'une tranchée couverte à section polygonale*, Rapport d'essai 08-03-RE02, EPFL, IBETON, Laboratoire de construction en béton, 184 pp., Lausanne, Suisse, Novembre, 2011.

[Cam11c] **Campana S., Rupf M.**, *Procédure pour les mesures au déformètre*, Rapport technique 50.35 - RT01, EPFL, IBETON, Laboratoire de construction en béton, 13 pp., Lausanne, Suisse, Novembre, 2011.

[Cam12] **Campana S., Muttoni A.**, *Essais d'effort tranchant sur éléments courbes sans armatures d'effort tranchant*, Rapport d'essai 08-03-RE03, EPFL, IBETON, Laboratoire de construction en béton, Lausanne, Suisse, Septembre, 2012.

[Cha87] **Chana P. S.**, *Investigation of the mechanism of shear failure of reinforced concrete beams*, Magazine of Concrete Research, Vol. 39, No. 141, pp. 196-204, Londres, Royaume-Uni, Décembre, 1987.

[Col96] **Collins M. P., Mitchell D., Adebar P., Vecchio F. J.**, *A general shear design method*, ACI Structural Journal, Vol. 93, No. 1, pp. 36-45, Detroit, États-Unis, Janvier, 1996.

[Cot94] **Cote P. A., Wallace J. W.**, *A study of reinforced concrete knee joints subjected to lateral cyclic loading*, College of Engineering, Clarkson University, Report No. CU/CEE-94-04, 143 p., Potsdam, États-Unis, 1994.

[Cra65] **Cranston W. B.**, *Tests on reinforced concrete frames*, Cement and Concrete Association, 38 p., Londres, Royaume-Uni, 1965.

[Dei87] **Dei Poli S., Gambarova P., Karakoç C.**, *Aggregate interlock role in RC thin-webbed beams in shear*, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 113, No. 1, pp. 1-19, Reston, États-Unis, Janvier, 1987.

[Dei92] **Dei Poli S., Di Prisco M., Gambarova P.**, *Shear response, deformations, and subgrade stiffness of a dowel bar embedded in concrete*, ACI Structural Journal, Vol. 89, No.6, pp. 665-675, Detroit, États-Unis, Novembre, 1992.

[Dei93] **Dei Poli S., Di Prisco M., Gambarova P.**, *Cover and stirrup effects on the shear response of dowel bar embedded in concrete*, ACI Structural Journal, Vol. 90, No. 4, pp. 441-450, Detroit, États-Unis, Juillet-Août, 1993.

[Eur04] **Eurocode 2**, *Design of concrete structures, part 1-1 : General rules and rules for buildings*, CEN, EN 1992-1-1, 225 p., Bruxelles, Belgique, Avril, 2004.

[Fei74] **Fein H. D., Zwissler U.**, *Aufnahme von Umlenkkräften aus stetig gekrümmten Bewehrungsstäben durch den Beton*, Die Bautechnik, Vol. 51, Heft 2, pp. 58-61, Berlin, Allemagne, Février, 1974.

[Fen68] **Fenwick R. C., Paulay T.**, *Mechanisms of shear resistance of concrete beams*, Journal of the Structural Division, Proceedings of the ASCE, Vol. 94, No. ST10, pp. 2325-2350, Reston, États-Unis, Octobre, 1968.

[Fer07a] **Fernández Ruiz M., Muttoni A.**, *On development of suitable stress fields for structural concrete*, ACI Structural Journal, Vol. 104, No. 4, pp. 495-502, Farmington Hills, États-Unis, Juillet, 2007.

[Fer07b] **Fernández Ruiz M., Muttoni A., Gambarova P.**, *Analytical modelling of the pre- and post-yield behaviour of bond in reinforced concrete*, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 133, No. 10, pp. 1364-1372, Reston, États-Unis, Octobre, 2007.

[Fer09a] **Fernández Ruiz M., Campana S., Muttoni A.**, *Discussion of paper : Influence of flexural reinforcement on shear strength of prestressed concrete beams by E. I. Saqan and R. J. Frosch*, ACI Structural Journal, Vol. 106, No. 6, pp. 907-908, Farmington Hills, États-Unis, Novembre-Décembre, 2009.

[Fer09b] **Fernández Ruiz M., Muttoni A.**, *Applications of the critical shear crack theory to punching of reinforced concrete slabs with transverse reinforcement*, ACI Structural Journal, Vol. 106, No. 4, pp. 485-494, Farmington Hills, États-Unis, Juillet-Août, 2009.

[Fer10] **Fernández Ruiz M., Plumey S., Muttoni A.**, *Interaction between bond and deviation forces in spalling failures of arch-shaped members without transverse reinforcement*, ACI Structural Journal, Vol. 107, No. 3, pp. 346-354, Farmington Hills, États-Unis, Mai-Juin, 2010.

[Fer11] **Fernández Ruiz M., Muttoni A., Kunz J.**, *Strengthening of flat slabs against punching shear using post-installed shear reinforcement*, ACI Structural Journal, Vol. 107, No. 4, pp. 434-442, Farmington Hills, États-Unis, Juillet, 2010.

[Fer12] **Fernández Ruiz M., Mirzaei Y., Muttoni A.**, *Post-punching behavior of flat slabs*, ACI Structural Journal, Farmington Hills, États-Unis, accepté pour la publication.

[Fib11] **FIB**, fib Model Code 2010 Final Draft, fib, 653 p., Lausanne, Suisse, Septembre, 2011.

[Gui10] **Guidotti R.**, *Poinçonnement des planchers-dalles avec colonnes superposées fortement sollicitées*, Thèse de doctorat, No. 4812, EPFL, 230 p., Lausanne, Suisse, 2010.

[Hil83] **Hillerborg A.**, *Analysis of a single crack, Fracture mechanics of concrete*, edited by F.H.Wittmann, Elsevier science Publishers B.V., pp. 223-249, Amsterdam, Pays-Bas, 1983.

[Hor92] **Hordijk D. A.**, *Tensile and tensile fatigue behaviour of concrete, experiments, modelling and analyses*, Heron, 37/1, Delft, Pays-Bas, 1992.

[Int04] **Intichar M., Ebner M., Sparowitz L.**, *Umlenkkräfte in gekrümmten Stahlbetonbalken*, Österreichische Ingenieur- und Architekten-Zeitschrift, Vol. 149, No. 1, pp. 11- 16, Autriche, 2004.

[Jac95] **Jackson N.**, *Design of reinforced concrete opening corners*, The Structural Engineer, Vol. 73, No. 13, pp. 209-213, Londres, Royaume-Uni, Juillet, 1995.

[Jel99] **Jelic I., Pavlovic M. N., Kotsovos M. D.**, *A study of dowel action in reinforced concrete beams*, Magazine of Concrete Research, Vol. 2, No. 2, pp. 131-141, Londres, Royaume-Uni, Avril, 1999.

[Joh01] **Johansson M.**, *Reinforcement detailing in concrete frame corners*, ACI Structural Journal, Vol. 98, No. 1, pp. 105-115, Farmington Hills, États-Unis, Janvier-Février, 2001.

[Kan64] **Kani G. N. J.**, *The riddle of shear failure and its solution*, ACI Journal, Vol. 61, No. 4, pp. 441-467, Detroit, États-Unis, Avril, 1964.

[Kan66] **Kani G. N. J.**, *Basic Facts Concerning Shear Failure*, ACI Journal, Vol. 63, No. 6, pp. 675-692, Detroit, États-Unis, Juin, 1966.

[Kan67] **Kani G. N. J.**, *How safe are our large reinforced concrete beams ?*, ACI Journal, Vol. 64, No. 3, pp. 128-147, Detroit, États-Unis, March, 1967.

[Kan79] **Kani M. W., Huggins M. W., Wittkopp R. R.**, *Kani on shear in reinforced concrete*, Department of Civil Engineer, University of Toronto, 226 p., Toronto, Canada, 1979.

[Kor70] **Kordina K., Fuchs G.**, *Untersuchungen zur Anwendung von hakenförmigen Übergreifungsstößen in Rahmenecken*, Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau, Der Technischen Universität Braunschweig, 10 p., Braunschweig, Allemagne, Janvier, 1970.

[Kor76] **Kordina K.**, *Untersuchungen über die Bewehrungsführung in geknickten Treppenlaufplatten*, Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau, Der Technischen Universität Braunschweig, 17 p., Braunschweig, Allemagne, 1976.

[Kor78] **Kordina K., Wiedemann G.**, *Bewehrungsführung in Rahmenecken*, Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau, Der Technischen Universität Braunschweig, 31 p., Braunschweig, Allemagne, 1978.

[Kor84] **Kordina K.**, *Bewehrungsführung in Ecken und Rahmenendknoten*, Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau, Der Technischen Universität Braunschweig, 93 p., Braunschweig, Allemagne, Janvier, 1984.

[Kos09] **Kostic N.**, *Topologie des champs de contraintes pour le dimensionnement des structures en béton armé*, Thèse de doctorat, No. 4414, EPFL, 235 p., Lausanne, Suisse, 2009.

[Kot83] **Kotsovos M. D.**, *Mechanisms of shear failure*, Magazine of Concrete Research, Vol. 35, No. 123, pp. 99-106, Londres, Royaume-Uni, Juin, 1983.

[Kot84] **Kotsovos M. D.**, *Behavior of reinforced concrete beams with a shear span to depth ratio between 1.0 and 2.5*, ACI Structural Journal, Vol. 81, No. 3, pp. 279-286, Detroit, États-Unis, Mai, 1984.

[Kot86] **Kotsovos M. D.**, *Behavior of beams with shear span-to-depth ratios greater than 2.5*, ACI Structural Journal, Vol. 83, No. 6, pp. 1026-1034, Detroit, États-Unis, Novembre, 1986.

[Kre66a] **Krefeld W., Thurston Charles W.**, *Contribution of longitudinal steel to shear resistance of reinforced concrete beams*, ACI Journal, Vol. 63, No.3, pp. 325-344, Detroit, États-Unis, Mars, 1966.

[Kre66b] **Krefeld W., Thurston Charles W.**, *Studies of the shear diagonal tension strength of simply supported reinforced concrete beams*, ACI Journal, Vol. 63, No.4, pp. 451-476, Detroit, États-Unis, Avril, 1966.

[Kup69] **Kupfer H., Hilsdorf H., Rüsch H.**, *Behavior of concrete under biaxial stresses*, Journal of the American Concrete Institute, Proceedings, Vol. 66, No. 8, pp. 656-666, Detroit, États-Unis, Août, 1969.

[Leo62] **Leonhardt F.,Walther R.**, *Schubversuche an einfeldrigen Stahlbetonbalken mit und ohne Schubbewehrung*, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 151, Wilhelm Ernst & Sohn, 83 p., Berlin, Allemagne, 1962.

[Leo74] **Leonhardt F., Mönnig E.**, *Vorlesungen über Massivbau, Dritter Teil, Grundlagen zum Bewehren im Stahlbetonbau*, Springer-Verlag, 244 p., Berlin, Allemagne, 1974.

[Lun99] **Lundgren K.**, *Three-dimensional modelling of bond in reinforced concrete (theoretical model, experiments and applications)*, Division of Concrete Structures, Chalmers University of Technology, Thèse de doctorat, Publication 99 :1, 50 p., Göteborg, Suède, 1999.

[Luo94] **Luo Y. H., Durrani A. J., Bai S., Yuan J.**, *Study of reinforcing detail of tension bars in frame corner connections*, ACI Structural Journal, Vol. 91, No. 4, pp. 486-496, Detroit, États-Unis, 1994.

[Mar99] **Marti P., Alvarez M., Kaufmann W., Sigrist V.**, *Tragverhalten von Stahlbeton*, Fortbildungskurs für Bauingenieure, Institut für Baustatik und Konstruktion, 301 p., ETHZ, Zürich, Suisse, 1999.

[May71] **Mayfield B., Kong F. K., Bennison A., Twiston Davies J. C. D.**, *Corner joint details in structural lightweight concrete*, ACI Journal, Vol. 68, No. 5, pp. 366-372, Detroit, États-Unis, Mai, 1971.

[May72] **Mayfield B., Kong F. K., Bennison A.**, *Strength and stiffness of lightweight concrete corners*, ACI Journal, Vol. 69, No. 7, pp. 420-427, Detroit, États-Unis, Juillet, 1972.

[Mcc95] **McConnell S. W., Wallace J. W.**, *Behavior of reinforced concrete beam-column knee-joints subjected to reversed cyclic loading*, Department of Civil and Environmental Engineering, Clarkson University, Report No. CU/CEE-95-07, 197 p., Potsdam, États-Unis, 1995.

[Mir79] **Mirza S. E., MacGregor J. G.**, *Variability of mechanical properties of reinforcing bars*, Proceedings of the ASCE, Vol. 105, No. ST5, pp. 921-937, Reston, États-Unis, Mai, 1979.

[Mod54] **Moody K.G., Viest I. M., Elstner R. C., Hognestad E.** , *Shear Strength of reinforced Concrete Beams - Part 1 : Test of Simple Beams*, ACI Journal, Vol. 51, No. 4, pp. 317-332, Detroit, États-Unis, Décembre, 1954.

[Mor57] **Morrow J., Viest I. M.**, *Shear strength of reinforced concrete frame members without web reinforcement*, ACI Journal, Vol. 53, No. 3, pp. 833-869, Detroit, États-Unis, Mars, 1957.

[Mut91] **Muttoni A., Schwartz J.**, *Behavior of beams and punching in slabs without shear reinforcement*, IABSE Colloquium, Vol. 62, pp. 703-708, Stuttgart, Allemagne, 1991.

[Mut97] **Muttoni A., Schwartz J., Thürlimann B.**, *Design of concrete structures with stress fields*, Birkhäuser Verlag, 143 p., Basel, Suisse, 1997.

[Mut03] **Muttoni A.**, *Schubfestigkeit und Durchstanzen von Platten ohne Querkraftbewehrung*, Beton und Stahlbetonbau, Vol. 98, No. 2, pp. 74-84, Berlin, Allemagne, Février, 2003.

[Mut08a] **Muttoni A., Fernández Ruiz M.**, *Shear strength of members without transverse reinforcement as function of critical shear crack width*, ACI

Structural Journal, Vol. 105, No. 2, pp. 163-172, Farmington Hills, États-Unis, Mars-Avril, 2008.

[Mut08b] **Muttoni, A.**, *Punching shear strength of reinforced concrete slabs without transverse reinforcement*, ACI Structural Journal, Vol. 105, No. 4, pp. 440-450, Farmington Hills, États-Unis, Juillet-Aout, 2008.

[Mut12a] **Muttoni A., Fernández Ruiz M.**, *The levels-of-approximation approach in MC 2010 : application to punching shear provisions*, Structural Concrete, Vol. 13, No. 1, pp. 32-41, 2012.

[Mut12b] **Muttoni A., Fernández Ruiz M.**, *Levels-of-approximation approach in codes of practice*, Structural Engineering International, Vol. 2, No. 2, pp. 190-194, Zürich, Suisse, Mai, 2012.

[Mil84] **Millard S. G., Johnson R. P.**, *Shear transfer across cracks in reinforced concrete due to aggregate interlock and to dowel action*, Magazine of Concrete Research, Vol. 36, No. 126, pp. 9-21, Londres, Royaume-Uni, 1984.

[Mil85] **Millard S. G., Johnson R. P.**, *Shear transfer in cracked reinforced concrete*, Magazine of Concrete Research, Vol. 37, No. 130, pp. 3-15, Londres, Royaume-Uni, 1985.

[Neu81] **Neuner J., Stöckl S.**, *Versuche zur Aufnahme der Umlenkkräfte von gekrümmten Bewehrungsstäben durch Betondeckung und Bügel*, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 322, pp. 71-106, Berlin, Allemagne, 1981.

[Nie99] **Nielsen M. P.**, *Limit analysis and concrete plasticity*, Department of Structural Engineering and Materials, Thechnical University of Denmark, CRC Press, 908 p., Copenhague, Danemark, 1999.

[Nil73] **Nilsson I. H. E.**, *Reinforced concrete corners and joints subjected to bending moment*, The National Swedish Institute for Building Research (Stockholm), Division of Concrete Structures, Chalmers University of Technology, Thèse de doctorat, Document D7 :1973, 249 p., Göteborg, Suède, 1973.

[Noo77] **Noor F. A.**, *Ultimate strength and cracking of wall corners*, Cement and Concrete Association, pp. 31-35, Londres, Royaume-Uni, Juillet, 1977.

[Ost63] **Östlund L.**, *Inverkan av bockningsradier and täckande betongskikt hos kamstål på spjälkningsrisken för armerade betongkonstruktioner*, The Royal Institute of Technology, Stockholm, Suède, 1963.

[Pau74a] **Paulay T., Loeber P. J.**, *Shear transfer by aggregate interlock*, ACI Special Publication SP-42, Shear in reinforced concrete, Vol. 1, pp. 1-16, Detroit, États-Unis,1974.

[Pau74b] **Paulay T., Park R., Phillips M. H.**, *Horizontal construction joints in cast-in-place reinforced concrete*, ACI Special Publication SP-42, Shear in reinforced concrete, Vol. 2, pp. 599-616, Detroit, États-Unis,1974.

[Per12] **Pérez Caldentey A., Padilla P., Muttoni A., Fernández Ruiz M.**, *Effect of load distribution and variable depth on the shear resistance of slender beams without stirrups*, ACI Structural Journal, Vol. 109, No. 5, pp. 595-604, Farmington Hills, États-Unis, Septembre, 2012.

[Sag08] **Sagaseta J.**, *The influence of aggregate fracture on the shear strength of reinforced concrete beams*, Thèse de doctorat, 409 p., Imperial College London, Londres, Royaume-Uni, Septembre, 2008.

[Sag11] **Sagaseta J., Vollum R. L.**, *Influence of aggregate fracture on shear transfer through cracks in reinforced concrete*, Magazine of Concrete Research, Vol. 63, No. 2, pp. 119-137, Londres, Royaume-Uni, 2011.

[Saq09] **Saqan E. I., Frosch R. J.**, *Influence of flexural reinforcement on shear strength of prestressed concrete beams*, ACI Structural Journal, Vol. 106, No. 1, pp. 60-68, Farmington Hills, États-Unis, Janvier, 2009.

[Sch87] **Schlaich J., Schäfer K., Jennewein M.**, *Toward a consistent design of structural concrete*, PCI Journal, Vol. 32, No. 3, pp. 75-150, Chicago, États-Unis, Mai, 1987.

[Sia03] **SIA**, *SIA 262 : Construction en béton*, Société suisse des ingénieurs et des architectes, Norme suisse SN EN 505 262, 94 pp., Zürich, Suisse, 2003.

[Sig95] **Sigrist V.**, *Zum Verformungsvermögen von Stahlbetonträgern*, Thèse de doctorat, No. 11169, 159 p., ETHZ, Zürich, Suisse, 1995.

[Ske84] **Skettrup E., Strabo J., Andersen N. H., Brondum-Nielsen T.**, *Concrete Frame Corners*, ACI Structural Journal, Vol. 81, No. 6, pp. 587-593, Detroit, États-Unis, Novembre-Décembre, 1984.

[Stu00] **Stucki D., Thürlimann B.**, *Versuche an Eckverbindungen aus Stahlbeton*, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETHZ, Bericht Nr. 8701-1, 68 p., Zurich, Suisse, 1990.

[Swa69] **Swann R. A.**, *Flexural strength of corners of reinforced concrete portal frames*, Cement and Concrete Association, 14 p., Londres, Royaume-Uni, 1969.

[Tay69] **Taylor H. P. J.**, *Investigation of the dowel shear forces carried by the tensile steel in reinforced concrete beams*, Cement and Concrete Association Report No. TRA 431, 24 p., Londres, Royaume-Uni, 1969.

[Tay70] **Taylor H. P. J.**, *Investigation of the forces carried across cracks in reinforced concrete beams in shear by interlock of aggregate*, Cement and Concrete Association, Technical Report No. 42.77, 22 p., Londres, Royaume-Uni, 1970.

[Tur03] **Tureyen A. K., Frosch R. J.**, *Concrete shear strength : another perspective*, ACI Structural Journal, Vol. 100, No. 5, pp. 609-615, Farmington Hills, États-Unis, Septembre-Octobre, 2003.

[Ula03] **Ulaga T.**, *Betonbauteile mit Stab- und Lamellenbewehrung : Verbund- und Zuggliedmodellierung*, Thèse de doctorat, No. 15062, 161 p., ETHZ, Zürich, Suisse, 2003.

[Van76] **van Dijk H. A., Nelissen L. J. M., van Stekelenburg P. J.**, *Het gedrag van kolom-balkverbindingen in gewapend beton*, Report 5-76-02, Stevin Laboratory, Department of Civil Engineering, Delft University of Technology, 81 p., Delft, Pays-Bas, 1976.

[Vaz10] **Vaz Rodrigues R., Muttoni A., Fernández Ruiz M.**, *Influence of shear on rotation capacity of reinforced concrete members without shear reinforcement*, ACI Structural Journal, Vol. 107, No. 5, pp. 516-525, Farmington Hills, États-Unis, Septembre-Octobre, 2010.

[Vec86] **Vecchio F. J., Collins M. P.**, *The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear*, ACI Journal, Vol. 83, No. 2, pp. 219-231, Detroit, États-Unis, Mars-Avril, 1986.

[Wag29] **Wagner H.**, *Ebene Blechwandträger mit sehr dünnen Stegblech*, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, Vol. 20, No. 8-12, pp. 306-315, Dantzig, Pologne, 1929.

[Wal78] **Walraven J. C.**, *Mechanisms of shear transfer in cracks in concrete - a survey of literature*, Report 5-78-12, Stevin Laboratory, Department of Civil Engineering, Delft University of Technology, Delft, Pays-Bas, Décembre, 1978.

[Wal80] **Walraven J. C.**, *Aggregate interlock : a theoretical and experimental investigation*, Thèse de doctorat, Delft University of Technology, 197 p., Delft, Pays-Bas, 1980.

[Was35] **Wästlund G.**, *Om armering av vinkelformade betongkonstruktioner*, Betong, No. 1, pp. 22-35, Stockholm, Suède, 1935.

[Zar97] **Zararis P. D.**, *Aggregate interlock and steel shear forces in the analysis of RC membrane elements*, ACI Structural Journal, Vol. 94, No. 2, pp. 159-170, Farmington Hills, États-Unis, Mars-Avril, 1997.

[Zar03] **Zararis P. D.**, *Shear strength and minimum shear reinforcement of reinforced concrete slender beams*, ACI Structural Journal, Vol. 100, No. 2, pp. 203-214, Farmington Hills, États-Unis, Mars-Avril, 2003.

[Zha07a] **Zhang N., Tan K. H.**, *Direct strut-and-tie model for single span and continuous deep beams*, Engineering Structures, Elsevier, Vol. 29, pp. 2987-3001, Mars, 2007.

[Zha07b] **Zhang N., Tan K. H.**, *Size effect in RC deep beams : Experimental investigation and STM verification*, Engineering Structures, Elsevier, Vol. 29, pp. 3241-3254, November, 2007.

Annexes

Annexe A

Calcul de la cinématique des fissures

Les mesures effectuées au déformètre (voir section 3.3) [Cam11c] permettent le calcul de la cinématique des fissures. En particulier, il est intéressant de connaître le déplacement relatif entre les deux lèvres d'une fissure en un point donné (point $f\,(x_f, y_f)$ de la figure A.1(a)). Ces déplacements peuvent être calculés en se référant à un système d'axes global ($\vec{u} = [u\ v]^T$, u étant le déplacement horizontal et v le déplacement vertical, voir figure A.1(b)) ou à un système d'axes local dont l'orientation change en fonction de l'inclinaison de la fissure (α) dans le point de calcul ($\vec{w} = [w\ \Delta]^T$, w étant l'ouverture mesurée le long de l'axe y' perpendiculaire à la fissure et Δ le glissement mesuré le long de l'axe x' parallèle à la fissure, voir figure A.1(b)).

Le modèle de calcul qui a été utilisé, qui considère que toutes les déformations se produisent à l'endroit de la fissure, est applicable uniquement si la zone délimitée par les quatre cibles considérées pour le calcul (cibles P1, P2, P3 et P4, voir figure A.1(a)) est traversée par une seule fissure.

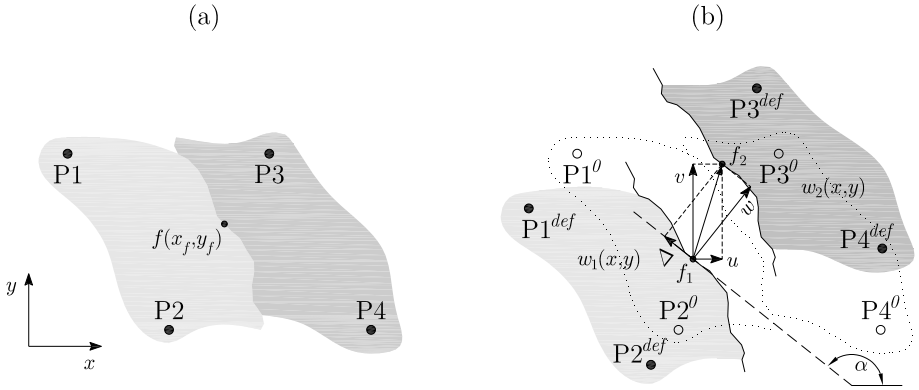


Fig. A.1: Principes du calcul de la cinématique des fissures : **(a)** configuration initiale non déformée (sans fissure) ; et **(b)** configuration déformée

Si cette condition est respectée, un champ de déplacement peut être déterminé de chaque côté de la fissure analysée (champ $w_1(x,y)$ pour le premier côté et champs $w_2(x,y)$ pour le deuxième). Le calcul des champs de déplacement se base sur les mouvements des deux cibles (P1-P2 ou P3-P4, voir figure A.1(a)) se trouvant du même côté par rapport à la fissure analysée. Les mouvements des cibles sont décrits par leur position initiale ($P1^0$, $P2^0$, $P3^0$ et $P4^0$, voir figure A.1(b)) et celle déformée correspondante au palier de charge analysé ($P1^{def}$, $P2^{def}$, $P3^{def}$ et $P4^{def}$, voir figure A.1(b)). Les champs de déplacement sont calculés selon :

$$w_1(x,y) = \begin{cases} a_1 - e_1\, x \\ b_1 + e_1\, y \end{cases} \quad \text{et} \quad w_2(x,y) = \begin{cases} a_2 - e_2\, x \\ b_2 + e_2\, y \end{cases} \tag{A.1}$$

avec :

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ e_1 \end{bmatrix} = \left(\mathbf{A}_1^T\, \mathbf{A}_1\right)^{-1} \left(\mathbf{A}_1^T\, \mathbf{c}_1\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ e_2 \end{bmatrix} = \left(\mathbf{A}_2^T\, \mathbf{A}_2\right)^{-1} \left(\mathbf{A}_2^T\, \mathbf{c}_2\right) \tag{A.2}$$

où :

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\mathrm{P1}_y^0 \\ 0 & 1 & \mathrm{P1}_x^0 \\ 1 & 0 & -\mathrm{P2}_y^0 \\ 0 & 1 & \mathrm{P2}_x^0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\mathrm{P3}_y^0 \\ 0 & 1 & \mathrm{P3}_x^0 \\ 1 & 0 & -\mathrm{P4}_y^0 \\ 0 & 1 & \mathrm{P4}_x^0 \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

et :

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} \mathrm{P1}_x^{def} - \mathrm{P1}_x^0 \\ \mathrm{P1}_y^{def} - \mathrm{P1}_y^0 \\ \mathrm{P2}_x^{def} - \mathrm{P2}_x^0 \\ \mathrm{P2}_y^{def} - \mathrm{P2}_y^0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{P3}_x^{def} - \mathrm{P3}_x^0 \\ \mathrm{P3}_y^{def} - \mathrm{P3}_y^0 \\ \mathrm{P4}_x^{def} - \mathrm{P4}_x^0 \\ \mathrm{P4}_y^{def} - \mathrm{P4}_y^0 \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

Le déplacement entre les deux lèvres de la fissure en un point donné se réfère à la distance entre le point f_1 (situé sur la première lèvre de la fissure, voir figure A.1(b)) et le point f_2 (situé sur la deuxième lèvre de la fissure, voir figure A.1(b)). En configuration non déformée, quand la fissure n'existe pas, les points f_1 et f_2 se trouvent dans la même position (point $f(x_f, y_f)$, voir figure A.1(a)). Le vecteur déplacement, se référant au système d'axes global ($\vec{u}$) et définissant le mouvement du point f_2 par rapport au point f_1, peut donc être calculé comme étant la différence entre les deux champs de déplacement calculés précédemment :

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = w_2(x_f, y_f) - w_1(x_f, y_f) \tag{A.5}$$

Une fois le vecteur déplacement $\vec{u}$ connu, le vecteur $\vec{w}$ définissant l'ouverture w et le

glissement Δ de la fissure peut être déterminé, en fonction de l'inclinaison de la fissure (α) dans le point de calcul :

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} \Delta \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \vec{u} \tag{A.6}$$